

Delkapittel 9.2

oppgave 1

I en gjærkultur er tilveksten pr tidsenhet proporsjonal med gjærkulturens størrelse

Innfør nødvendige størrelser og skriv opp den tilhørende differensiallikningen. Vi skal også definere en startbet.

Trinn 1: Ved tidspunkt t er gjærkulturens størrelse gitt ved $N(t)$

Vi innfører proporsjonalitetsfaktoren $\lambda > 0$

Trinn 2: Siden det skjer en vekst er λ positiv, og vi får følgende differensiallikning

$$\frac{dN}{dt} = \lambda N$$

Startbetingelsen er $N(0) = N_0$

oppgave 2

Et fuktig porøst stoff mister væske pr tidsenhet i et forhold som er proporsjonal med den gjenværende væske i stoffet.

Innfør nødvendige størrelser og skriv opp den tilhørende differensiallikningen.

Definer også en startbetingelse

Trinn 1: Ved tidspunkt t er den gjenværende væske i stoffet gitt ved $R(t)$

Vi innfører proporsjonalitetsfaktoren $\lambda > 0$

Trinn 2: Siden det her foregår en reduksjon i væske, benytter vi $-\lambda$ og får følgende differensiallikning

$$\frac{dV}{dt} = -\lambda V$$

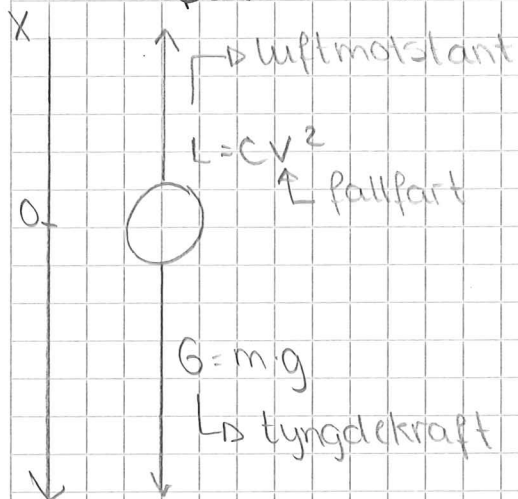
Startbetingelse $V(0) = V_0$

oppgave 6

Et legeme faller fritt gjennom luft og utsettes for en luftmotstand som er proporsjonal med kvadratet til fallfarten.

Innfør nødvendige størrelser og skriv opp den tilhørende differensiallikningen der fallfarten er den ene størrelsen

Definer en startbetingelse



Trinn 1: Den sentrale størrelsen er fallfarten v som avhenger av tiden t , $v(t)$

Innfør en dempningskonstant $c > 0$

Trinn 2: Benytter Newtons 2. lov som sier at:

Summen av kreftene som virker på et legeme er lik legemets masse m multiplisert med dets akselerasjon a ; $F = m \cdot a$

m = legemets masse

g = tyngdeakselerasjon

Vi vet fra tidligere at:

$$a(t) = dv/dt$$

Nå har vi alt vi trenger:

$$m \cdot a = mg - cv^2$$

$$m \frac{dv}{dt} + cv^2 = mg$$

Startbetingelsen er $v(0) = v_0$

Siden: $v(t) = \frac{dx}{dt}$, der $x(t)$ = er falllengden ved tiden t .

far vi at:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + c \left[\frac{dx}{dt} \right]^2 = mg$$

Delkapittel 9.3

Oppgave 2

Vi skal finne den homogene lineære differensiallikningen av andre orden for:

a) $y = C_1 e^{5x} + C_2 e^{-x}$

↳ dette gir at røttene til den karakteristiske likningen er

$$\lambda = 5 \text{ og } \lambda = -1$$

↳ som igjen gir følgende karakteristisk likning

$$(\lambda - 5)(\lambda + 1) = 0$$

$$\lambda^2 - 5\lambda + \lambda - 5 = 0$$

$$\lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0$$

↳ som igjen gir følgende homogene lineære differensiallikning

$$y'' - 4y' - 5y = 0$$

b) $y = C_1 e^{-4x} + C_2$

↳ dette gir at røttene til den karakteristiske likningen er:

$$\lambda = -4 \text{ og } \lambda = 0$$

↳ som igjen gir følgende karakteristiske likning

$$(\lambda + 4)(\lambda - 0) = 0$$

$$\lambda^2 + 4\lambda = 0$$

↳ Dette gir følgende homogene lineære differensiallikning:

$$y'' + 4y' = 0$$

oppgave 3

Løs hver differensiallikning

a, $y' - 7y = 0$

Antar at $y = Ae^{\lambda x}$ er en løsning og får:

$$\lambda Ae^{\lambda x} - 7Ae^{\lambda x} = 0 \quad | \text{deler på } Ae^{\lambda x}$$

$$\lambda - 7 = 0$$

| dette kalles den karakteristiske likningen

$$\lambda = 7$$

↳ dette kalles karakteristisk rot til likningen.

Dette gir at:

$$y = Ae^{7x}$$

der A er en konstant

b, $5y' + 2y = 0$

Karakteristisk likning er gitt ved:

$$5\lambda + 2 = 0$$

$$\lambda = -\frac{2}{5}$$

Dette gir at

$$y = Ae^{-\frac{2}{5}x}$$

der A er en konstant

Oppgave 3

c) $y'' - 9y = 0$

Den karakteristiske ligningen og dens røtter er gitt ved:

$$\lambda^2 - 9 = 0$$

$$\lambda = \pm 3$$

$$\lambda_1 = 3$$

$$\lambda_2 = -3$$

Dette gir følgende løsning:

$$y = Ae^{3x} + Be^{-3x}, \text{ der } A \text{ og } B \text{ er konstanter}$$

d) $25y'' - 4y = 0$

Den karakteristiske ligningen og dens røtter er gitt ved:

$$25\lambda^2 - 4 = 0$$

$$\lambda^2 = \frac{4}{25}$$

$$\lambda = \pm \frac{2}{5}$$

Dette gir følgende løsning:

$$y = Ae^{\frac{2}{5}x} + Be^{-\frac{2}{5}x}, \text{ der } A \text{ og } B \text{ er konstanter}$$

e) $y'' - 5y' + 6y = 0$

Den karakteristiske ligningen og dens røtter er gitt ved:

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$$

$$\lambda = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2}$$

$$\lambda = \frac{5 \pm 1}{2}$$

$$\lambda_1 = \frac{6}{2} = 3$$

$$\lambda_2 = \frac{4}{2} = 2$$

Dette gir følgende løsning:

$$y = Ae^{3x} + Be^{2x}, \text{ der } A \text{ og } B \text{ er konstanter}$$

Ex: $y(0) = 1$

$$y(0) = A + B = 1$$

$$B = 1 - (-2) = 3$$

$$y'(0) = 0$$

$$y' = 3Ae^{3x} + 2Be^{2x} = 3A + 2B = 0$$

$$3A + 2(1-A) = 0$$

$$3A - 2A = -2$$

$$A = -2$$

oppgave 4

a) $y' - 6y = 0$ $y(0) = 2$

- karakteristisk likning og dens rot er gitt ved:

$$\lambda - 6 = 0$$

$$\lambda = 6$$

- dette gir følgende løsning (allmenne løsning):

$$y = A e^{6x}, \text{ der } A \text{ er en konstant}$$

- A finner vi ved å benytte oss av initialbetingelsene

$$y(0) = A e^{6 \cdot 0} = 2$$

$$A = 2$$

- Vi får følgende løsning (bestemte løsning):

$$y = 2 e^{6x}$$

b) $7y' + 3y = 0$ $y(0) = -5$

- karakteristisk likning og dens rot er gitt ved:

$$7\lambda + 3 = 0$$

$$\lambda = -\frac{3}{7}$$

- dette gir følgende allmenne løsning

$$y = A e^{-\frac{3}{7}x}$$

- A finner vi ved å benytte initialbetingelsen:

$$y(0) = A e^{-\frac{3}{7} \cdot 0} = -5$$

$$A = -5$$

- Vi får følgende bestemte løsning:

$$y = -5 e^{-\frac{3}{7}x}$$

oppgave 4 c)

$$y'' - 4y = 0$$

$$y(0) = 4$$

$$y'(0) = 4$$

Den karakteristiske likningen og dens røtter er gitt ved:

$$\lambda^2 - 4 = 0$$

$$\lambda^2 = 4$$

$$\lambda_1 = 2$$

$$\lambda = \pm 2$$

$$\lambda_2 = -2$$

Dette gir følgende allmenne løsning:

$$y = A e^{2x} + B e^{-2x}$$

$$y' = 2A e^{2x} - 2B e^{-2x}$$

Initialbetingelsene gir at:

$$y(0) = A e^0 + B e^0 = 4$$

$$y'(0) = 2A e^0 - 2B e^0 = 4$$

$$A + B = 4$$

$$B = 4 - A$$

$$B = 4 - 3$$

$$B = 1$$

$$2A - 2B = 4$$

$$2A - 2(4 - A) = 4$$

$$2A - 8 + 2A = 4$$

$$4A = 12$$

$$A = 3$$

Dette gir følgende bestemte løsning:

$$\underline{y = 3e^{2x} + e^{-2x}}$$

Delkapittel 9.3

oppgave 6

a) $y'' - 5y' + 6y = 4 + 52 \sin(2x)$

- Løser først den homogene diff. lkn:

$$y'' - 5y' + 6y = 0$$

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$$

← karakt. lkn.

$$\lambda = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2}$$

$$\lambda = \frac{5 \pm 1}{2}$$

$$\lambda_1 = \frac{6}{2} = 3$$

$$\lambda_2 = \frac{4}{2} = 2$$

} karakt. røtter

- Den allmenne løsningen for den homogene lkn. er gitt ved

$$y_h = A e^{\lambda_1 x} + B e^{\lambda_2 x} = A e^{3x} + B e^{2x}$$

- Et forslag til partikulær løsning finner vi via tabell 9.2:

$$y_p = K + L \cos(2x) + M \sin(2x)$$

$$y_p' = -2L \sin(2x) + 2M \cos(2x)$$

$$y_p'' = -4L \cos(2x) - 4M \sin(2x)$$

- Setter inn i diff. lkn. og får:

$$(-4L \cos(2x) - 4M \sin(2x)) - 5(-2L \sin(2x) + 2M \cos(2x)) + 6(K + L \cos(2x) + M \sin(2x)) = 4 + 52 \sin(2x)$$

$$(-4L - 10M + 6L) \cos(2x) + (-4M + 10L + 6M) \sin(2x) + 6K = 4 + 52 \sin(2x)$$

$$1) \quad 6K = 4 \\ K = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$2) \quad -4L - 10M + 6L = 0$$

$$2L = 10M \\ L = 5M$$

$$L = 5$$

$$3) \quad -4M + 10L + 6M = 52$$

$$2M + 50M = 52$$

$$M = 1$$

c) Den allmenne løsningen av den inhomogene diff. lkn er gitt ved:

$$y = y_h + y_p = \underline{Ae^{3x} + Be^{2x} + \frac{2}{3} + 5\cos(2x) + \sin(2x)}$$

b) $y'' - 2y' = 6e^x - 5\cos x$

- løser først den homogene diff. lkn:

$$y'' - 2y' = 0$$

$$\lambda^2 - 2\lambda = 0$$

$$\lambda(\lambda - 2) = 0$$

$$\lambda_1 = 0$$

$$\lambda_2 = 2$$

$$y_h = Ae^{0x} + Be^{2x} = A + Be^{2x}$$

- Et forslag til partikulær løsning finner vi uha Tabell 9.2:

$$y_p = Ke^x + L\cos x + M\sin x$$

$$y_p' = Ke^x - L\sin x + M\cos x$$

$$y_p'' = Ke^x - L\cos x - M\sin x$$

- Setter inn i diff. lkn og får:

$$(Ke^x - L\cos x - M\sin x) - 2(Ke^x - L\sin x + M\cos x) =$$

$$(K - 2K)e^x + (-L - 2M)\cos x + (-M + 2L)\sin x =$$

$$6e^x - 5\cos x$$

Dette gir:

1) $K - 2K = 6$

$$K = -6$$

2) $-L - 2M = -5$

$$-L - 4L = -5$$

$$L = 1$$

3) $-M + 2L = 0$

$$M = 2L$$

$$M = 2$$

3: Den allmänna lösningen av den inhomogena
diff. lkn er gitt ved

$$y = y_h + y_p = \underline{A + Be^{2x} - 6e^x + \cos x + 2\sin x}$$

Delkapittel 9.4

Oppgave 1

a) $y \cdot y' - 2x = 0$

$$y \cdot y' = 2x$$

① $y \cdot \frac{dy}{dx} = 2x$

Separabel diff. lkn.

② $\int y \frac{dy}{dx} dx = \int 2x dx$

③ $\int y dy = \int 2x dx$

$$\frac{1}{2} y^2 = x^2 + C_1$$

$$y^2 = 2x^2 + 2C_1$$

$$2C_1 = C$$

$$y^2 = 2x^2 + C$$

$$y = \pm \sqrt{2x^2 + C}$$

b) $x^2 \cdot y' + 3y = 0$

$$x^2 \cdot y' = -3y$$

$$y' = -\frac{3y}{x^2}$$

① $\frac{1}{3y} \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2}$

Separabel diff. lkn

② $\int \frac{1}{3y} dy = -\int \frac{1}{x^2} dx$

$$\frac{1}{3} \int \frac{1}{y} dy = -\int x^{-2} dx$$

$$\frac{1}{3} \ln|y| = -\frac{1}{-2+1} x^{-2+1} + C_1$$

$$C = 3C_1$$

$$\ln|y| = 3 \cdot \frac{1}{x} + C$$

$$e^{\ln|y|} = e^{\frac{3}{x} + C} = e^C \cdot e^{\frac{3}{x}}$$

$$K = \pm e^C$$

$$y = (\pm e^C) e^{\frac{3}{x}} = \underline{K e^{\frac{3}{x}}}$$

oppgave 1

$$c) \quad x \cdot y' - y(x-2) = 0$$

$$x y' = y(x-2)$$

$$y' = \frac{y(x-2)}{x}$$

$$\textcircled{1} \quad \frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = \frac{x-2}{x}$$

separabel diff. lkn

$$\textcircled{2} \quad \int \frac{1}{y} dy = \int \frac{x-2}{x} dx$$

↑ utfører en delbrøttoppsplting:

$$\frac{x-2}{x} = \frac{x}{x} - \frac{2}{x} = 1 - \frac{2}{x}$$

for samme resultat hvis du gjør en polynomdivisjon

$$\begin{array}{r} x-2 : x = 1 \\ \underline{x} \\ -2 \end{array}$$

$$\ln|y| = x - 2 \ln|x| + C_1$$

$$e^{\ln|y|} = e^{x - 2 \ln|x| + C_1}$$

$$= \frac{e^{C_1} \cdot e^x}{e^{2 \ln|x|}} = \frac{e^{C_1} \cdot e^x}{e^{\ln(x^2)}}$$

$$|y| = \frac{e^{C_1} e^x}{x^2}$$

$$y = \frac{(\pm e^{C_1}) e^x}{x^2} = \frac{C e^x}{x^2}$$

Oppgave 2

$$a) \quad (x+1)y' - 4y = 0 \quad y(0) = 6$$

$$y' = \frac{4y}{x+1}$$

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = \frac{4}{x+1}$$

separabel diff. lkn.

$$\int \frac{1}{y} dy = 4 \int \frac{1}{x+1} dx$$

$$\ln|y| = 4 \ln|x+1| + C_1$$

$$e^{\ln|y|} = e^{4 \ln|x+1| + C_1} = e^{C_1} e^{\ln(x+1)^4}$$

$$|y| = e^{C_1} (x+1)^4$$

der: $C = \pm e^{C_1}$

$$y = (\pm e^{C_1}) (x+1)^4 = \underline{C(x+1)^4}$$

$$y(0) = C \cdot 1^4 = 6$$

$$C = 6$$

$$\underline{y(x) = 6(x+1)^4}$$

oppgave 3

a) $y' + 2y = 4$

lineær diff. lkn av 1. orden

- Inhomogen
- konstante koeff.

- Finner først allmenn løsning av homogen diff. lkn:

diff. lkn: $y' + 2y = 0$

karakt. lkn: $\lambda + 2 = 0$

$$\lambda = -2$$

Allmenn løsning er gitt ved:

$$y(x)_h = A e^{-2x}$$

- Finner så partikulær løsning (se tabell 9.2):

$$y(x)_p = K$$

$$y'(x)_p = 0$$

setter inn i diff. lkn og får:

$$0 + 2K = 4$$

$$K = 2$$

- Allmenn løsning av inhomogen diff. lkn er gitt ved:

$$y(x) = y(x)_h + y(x)_p$$

$$= \underline{A e^{-2x} + 2}$$

oppgave 3

b) $x \cdot y' - y - 1 = 0$

$$x \cdot y' - y = 1$$

$$y' - \frac{1}{x} y = \frac{1}{x}$$

$$P(x) = -\frac{1}{x} \quad Q(x) = \frac{1}{x}$$

- linear diff. lkn av 1. orden

- inhomogen
- variable koef.

- Integrerende faktor:

$$\rho(x) = e^{\int P(x) dx}$$

$$= e^{-\int \frac{1}{x} dx} = e^{-\ln|x|} = e^{\ln|x|^{-1}} \\ = \frac{1}{|x|} = \frac{1}{x}$$

- Vi har at:

$$y(x) = \frac{1}{\rho(x)} \left[\int Q(x) \rho(x) dx + C \right]$$

$$= x \left[\int \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} dx + C \right]$$

$$= x \left[\int \frac{1}{x^2} dx + C \right]$$

$$= x \left[\frac{1}{-2+1} x^{-2+1} + C \right] = x \left[-\frac{1}{x} + C \right]$$

$$= \underline{\underline{Cx - 1}}$$

oppgave 5b

$$y' = x + y, \quad y(0) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1 \quad y(x) = e^x - x - 1$$

Vi skal løse initialverdi problemet med Eulers metode med

$$1) h = 0,1$$

$$2) h = 0,05$$

* jeg gjør kun denne

x	Euler	Ekstakt
0	0	0
0,1	0	0,005
0,2	0,01	0,021
0,3	0,031	0,050
0,4	0,064	0,092
0,5	:	:
0,6	:	:
0,7	:	:
0,8		
0,9		
1,0		

Eulers metode:

Vi har at:

$$y' = f(x, y) = x + y \quad h = 0,1 \quad x \in [0, 1]$$

- Rekursjonsformelen blir:

$$y_{n+1} = y_n + f(x_n, y_n) \cdot h$$

$$x_{n+1} = x_n + h$$

- Startverdiene er: $x_0 = 0$ og $y_0 = 0$

Vi får:

$$y_1 = y_0 + (x_0 + y_0) \cdot h = 0 + 0 \cdot h = 0 \quad x_1 = x_0 + h = 0 + 0,1 = 0,1$$

$$y_2 = y_1 + (x_1 + y_1) \cdot h = 0 + (0,1 + 0,1) \cdot 0,1 = 0,01 \quad x_2 = 0,2$$

$$y_3 = y_2 + (x_2 + y_2) \cdot h = 0,01 + (0,2 + 0,01) \cdot 0,1 = 0,031 \quad x_3 = 0,3$$

$$y_4 = y_3 + (x_3 + y_3) \cdot h = 0,031 + (0,3 + 0,031) \cdot 0,1 = 0,064 \quad x_4 = 0,4$$

⋮
O.S.V

oppgave 7

b) $y' = x + y$ $y(0) = 0$ $0 \leq x \leq 1$ $y(x) = e^x - x - 1$

Vi skal løse initialverdi problemet med Eulers midtpunktmetode for

1) $h = 0,1$ (*Vi ser kun på denne her)

2) $h = 0,05$

X	Eulers * metode	Eksakt
0	0	0
0,1	0,005	0,005
0,2	0,021	0,021
0,3	0,049	0,05
0,4	0,091	0,092
0,5	...	...
0,6	...	...
0,7	...	...
0,8		
0,9		
1,0		

Eulers midtpunktmetode:

Med $k_{1,n} = x_n + \frac{h}{2}$ og $k_{2,n} = y_n + (x_n + y_n) \cdot \frac{h}{2}$ får vi:

$$y_{n+1} = y_n + (k_{1,n} + k_{2,n}) \cdot h$$

$$= y_n + \left[\left(x_n + \frac{h}{2} \right) + \left(y_n + (x_n + y_n) \cdot \frac{h}{2} \right) \right] \cdot h$$

$$= \frac{h^2}{2} + \left(h + \frac{h^2}{2} \right) x_n + \left(1 + h + \frac{h^2}{2} \right) y_n$$

$h = 0,1$ og vi får $y_{n+1} = 0,005 + 0,105 x_n + 1,105 y_n$

$y_1 = 0,005 + 0,105 x_0 + 1,105 y_0 = 0,005$ $x_1 = x_0 + h = 0,1$

$y_2 = 0,005 + 0,105 x_1 + 1,105 y_1 = 0,005 + 0,105 \cdot 0,1 + 1,105 \cdot 0,005$
 $= 0,021$ $x_2 = x_1 + h = 0,2$

$y_3 = 0,005 + 0,105 \cdot 0,2 + 1,105 \cdot 0,021 = 0,049$ $x_3 = x_2 + h = 0,3$

$y_4 = 0,005 + 0,105 \cdot 0,3 + 1,105 \cdot 0,049 = 0,091$: o.s.v

oppgave 9

a, $y' = y$ $y(0) = 1$ $0 \leq x \leq 1$ $y(x) = e^x$

- Vi skal løse initialverdi problemet med Runge - Kutta metoden med

- 1, $h = 0,1$
 - 2, $h = 0,05$
- (vi ser kun på denne)

x	Runge- Kutta	Eksakt
0	1	1
0,1	1,105	1,105
0,2	1,221	1,221
0,3	1,350	1,350
0,4	1,492	1,492
0,5		1,649
0,6	:	:
0,7	:	:
0,8		
0,9		
1,0		

Runge - Kutta metoden:

Vi har at

$$K_{1,n} = f(x_n, y_n) = y_n$$

$$K_{2,n} = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + K_{1,n} \cdot \frac{h}{2}\right) = y_n + K_{1,n} \cdot \frac{h}{2} = y_n + \frac{y_n \cdot h}{2}$$

$$= \left(1 + \frac{h}{2}\right) y_n$$

$$K_{3,n} = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + K_{2,n} \cdot \frac{h}{2}\right) = y_n + K_{2,n} \cdot \frac{h}{2}$$

$$= y_n + \left(y_n + \frac{y_n \cdot h}{2}\right) \cdot \frac{h}{2} = y_n + \frac{y_n \cdot h}{2} + \frac{y_n h^2}{4}$$

$$= \left(1 + \frac{h}{2} + \frac{h^2}{4}\right) y_n$$

$$K_{4,n} = f(x_n + h, y_n + K_{3,n} \cdot h)$$

$$= y_n + K_{3,n} \cdot h = y_n + \left(1 + \frac{h}{2} + \frac{h^2}{4}\right) y_n \cdot h$$

$$= y_n + \left(h + \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{4}\right) y_n$$

$$= \left(1 + h + \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{4}\right) y_n$$

$$\begin{aligned}
Y_{n+1} &= Y_n + (k_{1,n} + 2k_{2,n} + 2k_{3,n} + k_{4,n}) \frac{h}{6} \\
&= Y_n + \left(Y_n + 2Y_n \left(1 + \frac{h}{2}\right) + 2Y_n \left(1 + \frac{h}{2} + \frac{h^2}{4}\right) + Y_n \left(1 + h + \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{4}\right) \right) \frac{h}{6} \\
&= Y_n + \left(Y_n + Y_n(2+h) + Y_n \left(2+h + \frac{h^2}{2}\right) + Y_n \left(1+h + \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{4}\right) \right) \frac{h}{6} \\
&= Y_n + \left(6Y_n + 3hY_n + h^2Y_n + \frac{h^3}{4}Y_n \right) \frac{h}{6} \\
&= Y_n + \left(hY_n + \frac{h^2}{2}Y_n + \frac{h^3}{6}Y_n + \frac{h^4}{24}Y_n \right) \\
&= \left(1 + h + \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{6} + \frac{h^4}{24} \right) Y_n = 1,1052 Y_n \text{ när } h=0,1
\end{aligned}$$

Detta ger:

$$Y_1 = 1,1052 \cdot Y_0 = 1,1052 \cdot 1 = 1,105$$

$$Y_2 = 1,1052 \cdot Y_1 = 1,1052^2 = 1,221$$

$$Y_3 = 1,1052 \cdot Y_2 = 1,1052 \cdot 1,221 = 1,350$$

$$Y_4 = 1,1052 \cdot Y_3 = 1,1052 \cdot 1,350 = 1,492$$

⋮