

Matematikk 1

Denne fila inneholder løsningsforslag til følgende ekstra øvingsoppgaver til kapittel 7.6, 7.7 og 7.9:

7.6.1 a - d

7.6.2 a

7.7.9

7.9.1 a - c

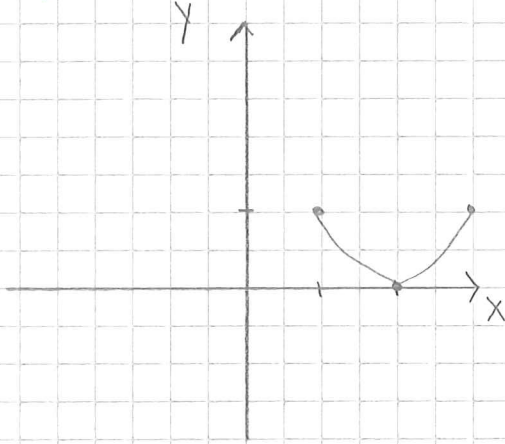
7.9.3 a - c

Delkapittel 7.6

oppgave 1

Undersøk for hver funksjon om den har lokale og globale maksima/minima

a) $f(x) = (x-2)^2$ $x \in [1, 3]$



$$f'(x) = 2(x-2)$$

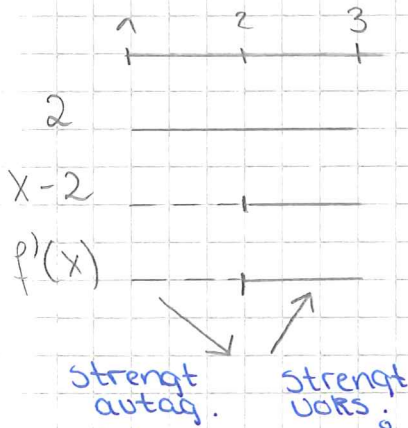
$$f'(x) = 0$$

$$= 2x - 4 = 0$$

$$2x = 4$$

$$x = \frac{4}{2} = 2$$

Et fortegnsskjema er et hjelpemiddel for å avgjøre fortegnet til den deriverte



I tillegg må vi ikke glemme grenseverdiene, dus:

$$x = 1$$

$$x = 3$$

Vi har altså 3 punkter som må sjekkes:

$$x = 1 \quad x = 2 \quad \text{og} \quad x = 3$$

Vi får:

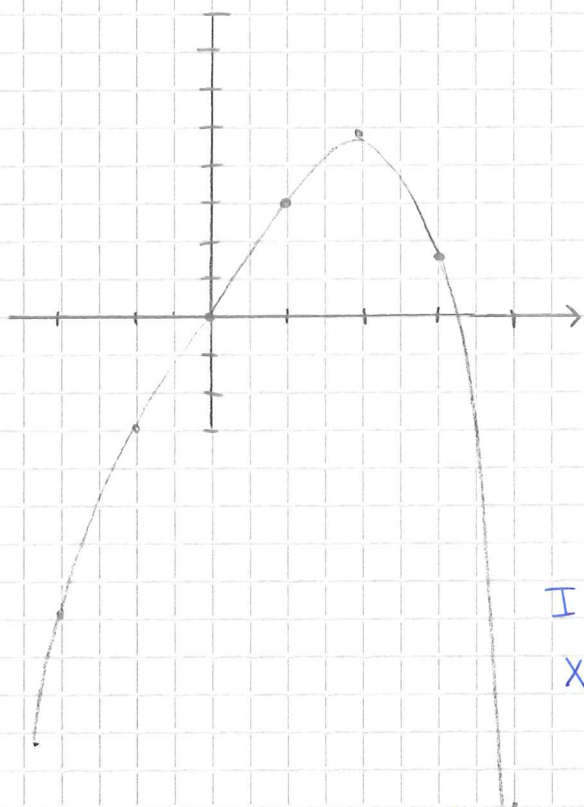
$$f_{\min}(2) = f_{\text{Min.}}(2) = 0$$

$$f_{\max}(1) = f_{\text{Max.}}(1) = 1$$

$$f_{\max}(3) = f_{\text{Max.}}(3) = 1$$

oppgave 1

b) $f(x) = 32x - x^4$ $x \in [-2, 4]$



$$f'(x) = 32 - 4x^3 = 4(8 - x^3)$$

$$f'(x) = 0$$

$$= 32 - 4x^3 = 0$$

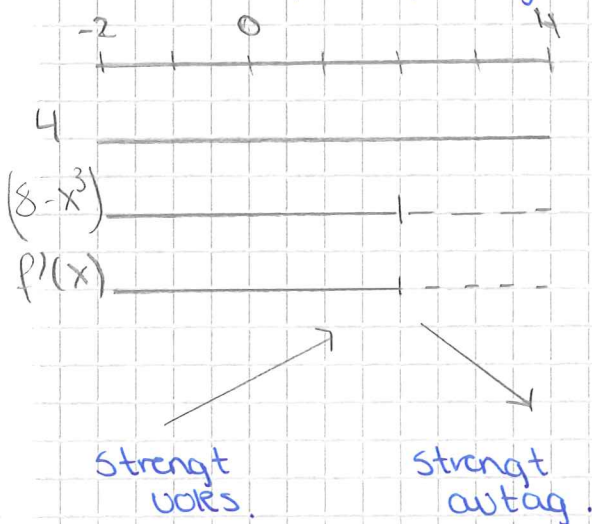
$$4x^3 = 32$$

$$x^3 = \frac{32}{4} = 8$$

$$x = \sqrt[3]{8} = 2$$

I tillegg må vi ta med endepunktet $x=4$.

Setter opp et fortegnsskjema:



Vi har altså 2 punkter som må sjekkes:

$$x = 2 \quad \text{og} \quad x = 4$$

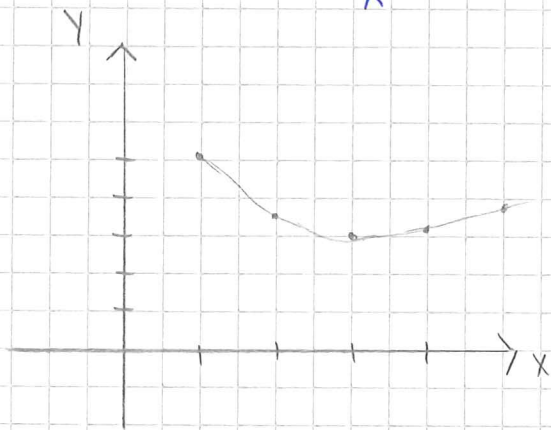
$$f_{\max}(2) = f_{\max}(2) = 48$$

$$f_{\min}(4) = f_{\min}(4) = -128$$

[Stemmer overens med grafen]

oppgave 1

c) $f(x) = x + \frac{9}{x}$ $x \in [1, 5]$



$$f'(x) = 1 - \frac{9}{x^2} = \frac{x^2 - 9}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \quad = \frac{(x-3)(x+3)}{x^2}$$

$$1 - \frac{9}{x^2} = 0$$

$$x^2 = 9$$

$$x = \pm 3$$

$$x = 3 \text{ (kun definert for } x=3)$$

I tillegg må vi ta med endepunktet $x=1$

Setter opp et fortegnsskjema

x^2	1	3	5
$x-3$	-	0	+
$x+3$	+	+	+
$f'(x)$	-	0	+

strengt
autag

strengt
voks

[stemmer overens
med figuren

Vi har altså to punkter som må
sees:

$$x = 1 \text{ og } x = 3$$

Vi får:

$$f_{\min}(3) = f_{\text{Min}}(3) = 6$$

$$f_{\max}(1) = f_{\text{Max}}(1) = 10$$

Oppgave 1

d) $f(x) = \sin x + \sqrt{3} \cos x$

$x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$f'(x) = \cos x - \sqrt{3} \sin x$

$f'(x) = 0$

$= \cos x - \sqrt{3} \sin x = 0 \quad | \times \frac{1}{\cos x}$

$= \frac{\cos x}{\cos x} - \sqrt{3} \frac{\sin x}{\cos x} = 0 \quad | \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

$\tan x = \frac{1}{\sqrt{3}}$

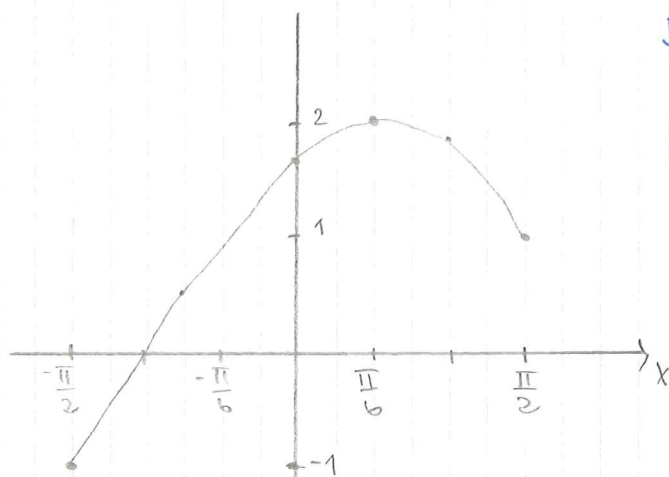
$x = \frac{\pi}{6}$

I tillegg må vi ikke glemme endepunktene

$x = -\frac{\pi}{2}$ og $x = \frac{\pi}{2}$

Vi har altså 3 punkter som må sjekkes:

$x = -\frac{\pi}{2}$ $x = \frac{\pi}{6}$ og $x = \frac{\pi}{2}$



$f_{\min}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

$f_{\min}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = f_{\min}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$

$f_{\max}\left(\frac{\pi}{6}\right) = f_{\max}\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2$

oppgave 2

a) $y = f(x) = (x-2)^3 + 1$ $x \in [-1, 3]$

i, skjæring med koordinataksene:

x-aksen $\rightarrow y = 0$

$$(x-2)^3 + 1 = 0$$

$$(x-2)^3 = -1$$

$$x-2 = \sqrt[3]{-1}$$

$$x = -1 + 2 = \underline{1}$$

$\therefore$ funksjonen skjærer x-aksen i $(1, 0)$

y-aksen $\rightarrow x = 0$

$$y = (0-2)^3 + 1$$

$$= -8 + 1 = \underline{-7}$$

$\therefore$ funksjonen skjærer y-aksen i $(0, -7)$

ii, Symmetri:

Regler: Symmetrisk om y-aksen: $f(-x) = f(x)$
Symmetrisk om origo: $f(-x) = -f(x)$

$$f(-x) = (-x-2)^3 + 1$$

$\therefore$ Ingen symmetriforhold

iii, Asymptoter:

a) vertikale asymptoter kan forekomme der nevneren ikke er defineret

∴ funktionen har ingen vertikale asymptoter

b) Horizontale asymptoter undersøges ved å lade $x \rightarrow \infty$ og $x \rightarrow -\infty$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (x-2)^3 + 1 \rightarrow \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x-2)^3 + 1 \rightarrow -\infty$$

∴ funktionen har ingen horizontale asymptoter

c) Skrå asymptoter finner vi ved å benytte def 5.11

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-2)^3 + 1}{x} = \frac{x^3 - 6x^2 + 12x - 7}{x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 6x + 12 - \frac{7}{x}}{1} = \infty$$

∴ funktionen har ingen skrå asymptoter

iv) globale og lokale minuma/maksima

$$f'(x) = 3(x-2)^2$$

$$f'(x) = 0$$

$$3(x-2)^2 = 0$$

$$(x-2)^2 = 0$$

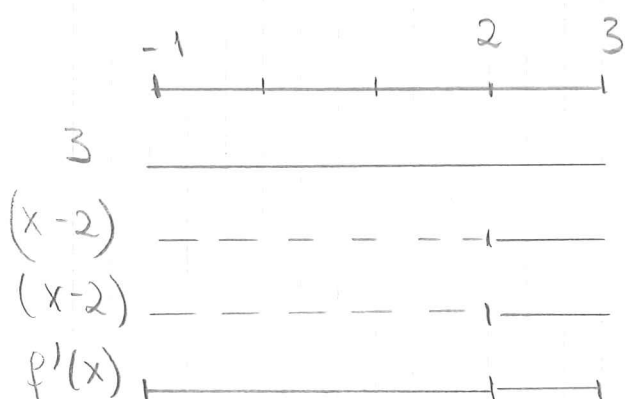
$$x-2 = 0$$

$$\underline{x = 2}$$

I tillegg har vi to endepunkter: $x = -1$ og $x = 3$

Vi har derfor 3 punkter som må sjekkes.

Setter opp fortegnsskjema for $f'(x) = 3(x-2)^2$



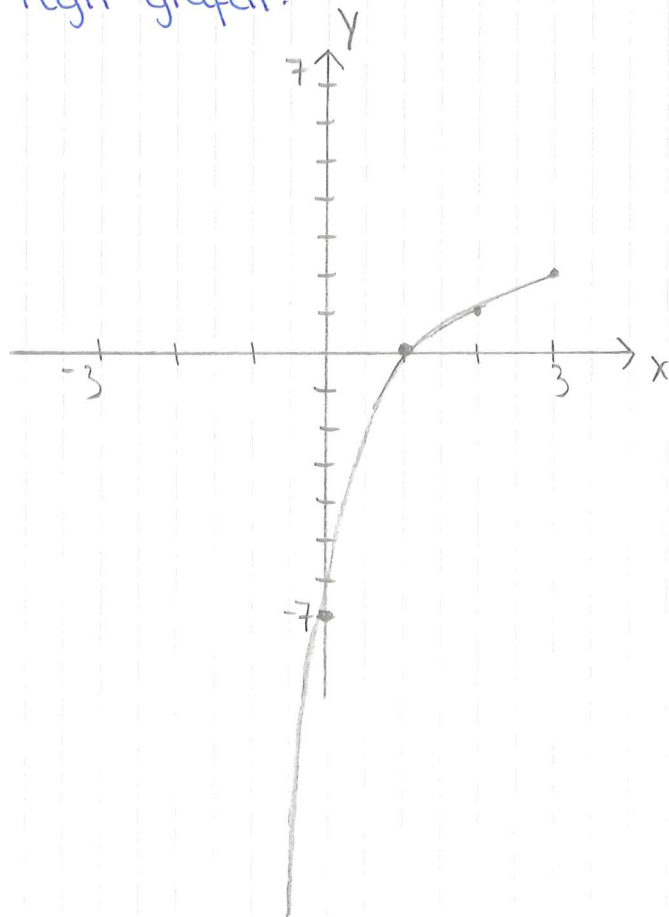
$$\underline{f_{\min}(-1) = f_{\text{Min}}(-1) = -26}$$

$$\underline{f_{\max}(3) = f_{\text{Max}}(3) = 2}$$

Ingen
ekstremalverdi

(dvs. $x=2$ er ikke en
ekstremalverdi)

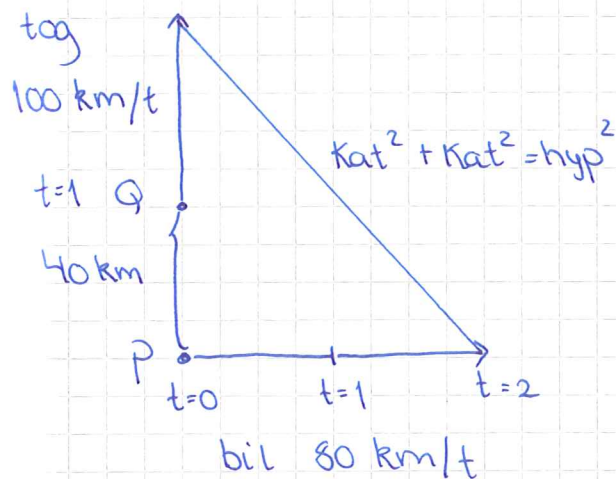
U, Tegn grafen:



oppgave 9

Kap 7.7

Trinn 1:



Vi ønsker å finne ut med hvilken fart bilen og toget vil fjerne seg fra hverandre ved tiden $t = 2$ timer $\rightarrow$ momentfarten ved $t=2$

Vet at strekningen(s) = farten(v) tiden(t)

Momentfarten kan bestemmes ved at vi beregner gjennomsnittsfarten over kortere og kortere tidsintervall h

La oss si at vi ønsker å finne momentfarten ved $t=a$ og tillater h positiv eller negativ.

Gjennomsnittsfarten mellom $t=a$ og $t=a+h$ blir

$$\frac{s(a+h) - s(a)}{a+h - a} \text{ og lar vi } h \rightarrow 0$$

får vi at momentfarten ved $t=a$ er lik $f'(a)$

Trinn 2:

Bilen tilbakelegger seg strekningen 80t i løpet av t timer.

Toget tilbakelegger seg strekningen:

$$100(t-1) + 40 \\ = 100t - 60$$

- Starter en time senere
- Starter 40 km nord for P.

Vi får: $f(t)$ = strekningen mellom bil og tog ved tiden t

$$= \text{hyp} = \sqrt{k a^2 + k a^2}$$

$$= \sqrt{(80t)^2 + (100t-60)^2}$$

$$= \sqrt{6400t^2 + 10000t^2 - 12000t - 3600}$$

$$= \sqrt{16400t^2 - 12000t - 3600}$$

Vi ønsker å finne $f'(t)$ for $t=2$

Trinn 3: $f(t) = (16400t^2 - 12000t + 3600)^{1/2}$

$$g(x) = u = 16400t^2 - 12000t + 3600$$

$$g'(x) = \frac{du}{dx} = 32800t - 12000$$

$$f(u) = u^{1/2}$$

$$f'(u) = \frac{1}{2} u^{-1/2} \cdot u'$$

$$= \frac{1}{2} (16400t^2 - 12000t + 3600)^{-1/2} \cdot (32800t - 12000)$$

$$= \frac{32800t - 12000}{2 \sqrt{16400t^2 - 12000t + 3600}}$$

Trinn 5:

$$f'(2) = \frac{32800 \cdot 2 - 12000}{2 \sqrt{16400 \cdot 2^2 - 12000 \cdot 2 + 3600}} = \text{ca } 126 \text{ km/h}$$

0: Bilen og toget beveger seg fra hverandre med en fart på ca 126 km/h

Delkapittel 7.9

oppgave 1

a) $x^4 - 3x + 1.5 = 0$ $x_0 = 1$

Vi danner funksjonen $F(x) = x^4 - 3x + 1.5$

$$F'(x) = 4x^3 - 3$$

Benytter teorem 7. med:

1) Basis : $x_0 = 1$

2, Rekursionsformel : $x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)}{F'(x_n)}$

$$\begin{aligned} n=0 \text{ gir } x_1 &= x_0 - \frac{F(x_0)}{F'(x_0)} \\ &= 1 - \frac{F(1)}{F'(1)} = 1 - \frac{(1^4 - 3 \cdot 1 + 1.5)}{4 \cdot 1^3 - 3} = 1 - \frac{(-\frac{1}{2})}{1} = \underline{\underline{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

b) $e^x - 3x = 0$ $x_0 = 0.5$

$$F(x) = e^x - 3x$$

$$F'(x) = e^x - 3$$

Basis: $x_0 = 0.5$

$$\begin{aligned} n=0 \text{ gir } x_1 &= x_0 - \frac{F(x_0)}{F'(x_0)} \\ &= 0.5 - \frac{F(0.5)}{F'(0.5)} = 0.5 - \frac{(e^{0.5} - 3 \cdot 0.5)}{e^{0.5} - 3} = \underline{\underline{0.61}} \end{aligned}$$

oppgave 1

$$c) \quad 5 \ln x - x - 1 = 0 \quad x_0 = 2$$

$$F(x) = 5 \ln x - x - 1$$

$$F'(x) = \frac{5}{x} - 1$$

$$\text{Basis: } x_0 = 2$$

$$\begin{aligned} n=0 \text{ gir } x_1 &= x_0 - \frac{F(x_0)}{F'(x_0)} \\ &= 2 - \frac{F(2)}{F'(2)} = 2 - \frac{(5 \ln 2 - 2 - 1)}{(5/2 - 1)} = \underline{\underline{1.69}} \end{aligned}$$

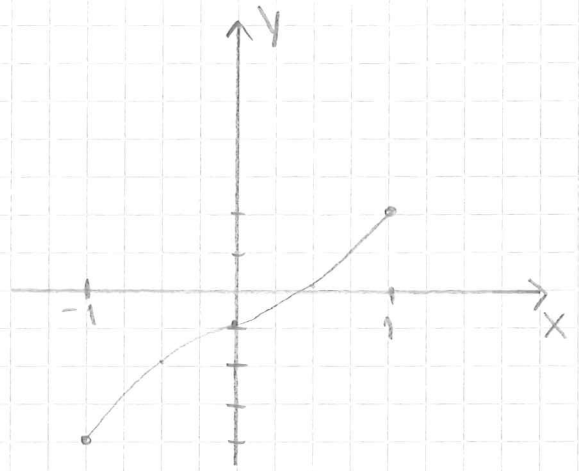
oppgave 3

a) $f(x) = x^3 + 2x - 1 \quad -1 \leq x \leq 1$

Benytter først skjæringssetningen:

$$f(-1) = -4$$

$$f(1) = 2$$



→ Siden $f(-1)$ og $f(1)$ har ulikt fortegn må grafen til $f(x)$ skjære x -aksen.

$$f'(x) = 3x^2 + 2 > 0$$

→ grafen til funksjonen $f(x)$ er strengt voksende i def. mengden

Basis: $x_0 = 0$

$$\begin{aligned} n=0 \text{ gir } x_1 &= x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \\ &= 0 - \frac{f(0)}{f'(0)} = 0 - \frac{(-1)}{2} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n=1 \text{ gir } x_2 &= x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{f(\frac{1}{2})}{f'(\frac{1}{2})} = \frac{1}{2} - \frac{(\frac{1}{8})}{(\frac{11}{4})} = \frac{1}{2} - \frac{1}{22} = \underline{\underline{0,455}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n=2 \text{ gir } x_3 &= x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} \\ &= 0,455 - \frac{f(0,455)}{f'(0,455)} = 0,455 - 0,0016 = \underline{\underline{0,453}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n=3 \text{ gir } x_4 &= x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)} \\ &= 0,453 - \frac{f(0,453)}{f'(0,453)} = 0,453 + 0,000 = \underline{\underline{0,453}} \end{aligned}$$

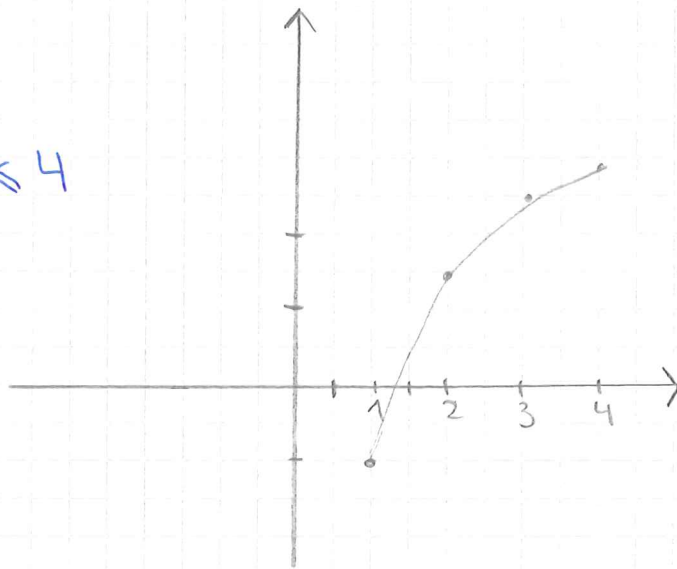
∴ Siden $x_4 \approx x_3$ har vi funnet en tilfredsstillende verdi med ønsket nøyaktighet.

oppgave 3

b) $f(x) = 5 \ln x - x \quad 1 \leq x \leq 4$

$$f(1) = 5 \ln 1 - 1 = -1$$

$$f(4) = 5 \ln 4 - 4 = 2,93$$



→ Skjæringssetningen sier at dersom $f(1)$ og $f(4)$ har ulikt fortegn, så må grafen til funksjonen $f(x)$ skjære x-aksen.

$$f'(x) = \frac{5}{x} - 1 = 0$$

$$x = 5$$



$$f'(x) > 0 \text{ for } x < 5 \text{ og } f'(x) < 0 \text{ for } x > 5$$

∴ grafen til funksjonen f har et maksimum for $x=5$ (ikke i def. mengden)

Videre ser vi at funksjonen er strengt voksende i def. mengden.

Vi har altså bare et nullpunkt!

Basis: $x_0 = 1$

$$n=0 \text{ gir } x_1 = x_0 - \frac{F(x_0)}{F'(x_0)}$$

$$= 1 - \frac{F(1)}{F'(1)} = 1 - \frac{(5 \ln 1 - 1)}{5/1 - 1} = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4} = 1,25$$

$$n=1 \text{ gir } x_2 = x_1 - \frac{F(x_1)}{F'(x_1)}$$

$$= \frac{5}{4} - \frac{F(5/4)}{F'(5/4)} = 1,295$$

$$n=2 \text{ gir } x_3 = 1,295 - \frac{F(1,295)}{F'(1,295)} = 1,2954$$

$$n=3 \text{ gir } x_4 = 1,2959$$

$$n=4 \text{ gir } x_5 = 1,2959$$

∴ Siden $x_4 \approx x_5$ har vi funnet tilfredsstillende verdi.

oppgave 3

c) $f(x) = \sin x + 2x - 1 \quad -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

$$\left. \begin{aligned} f\left(-\frac{\pi}{2}\right) &= \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) + 2 \cdot \left(-\frac{\pi}{2}\right) - 1 \\ &= -1 - \pi - 1 = -\pi - 2 \\ f\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \sin\frac{\pi}{2} + 2 \cdot \frac{\pi}{2} - 1 \\ &= 1 + \pi - 1 = \pi \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Skjæringssetningen sier at} \\ \text{Siden } f\left(-\frac{\pi}{2}\right) \text{ og } f\left(\frac{\pi}{2}\right) \text{ har ulikt} \\ \text{fortegn, så må grafen til} \\ \text{funksjonen } f \text{ skjære } x\text{-aksen.} \end{array}$$

$f'(x) = \cos x + 2 > 0$ Siden $\cos x \geq 0$ for $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

∴ Grafen til funksjonen er strengt voksende i def. mengden, noe som medfører at vi bare har et nullpunkt

Basis: $x_0 = 0$

$$\begin{aligned} n=0 \quad \text{gir} \quad x_1 &= x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \\ &= 0 - \frac{f(0)}{f'(0)} = 0 - \frac{(0 + 2 \cdot 0 - 1)}{(1 + 2)} \\ &= 0 + \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n=1 \quad \text{gir} \quad x_2 &= x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \\ &= \frac{1}{3} - \frac{f\left(\frac{1}{3}\right)}{f'\left(\frac{1}{3}\right)} = 0,335 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n=2 \quad \text{gir} \quad x_3 &= x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} \\ &= 0,335 - \frac{f(0,335)}{f'(0,335)} = 0,335 \end{aligned}$$

∴ Siden $x_3 \approx x_2$ har vi funnet tilfredsstillende verdi.