

Matematikk 1

Denne fila inneholder løsningsforslag til følgende ekstra øvingsoppgaver til kapittel 7.3 og 7.4:

7.3.1 a, b, c, f og c

7.3.2 a - d

7.4.1 a - g

7.4.2

Kap 7.3

oppgave 1

$$a) 3x - 2y^2 + y = 2$$

$$3 - 4y \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} (4y - 1) = 3$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{4y-1}$$

$$b) x^2 - 3xy + y = 2$$

$$2x - \left(3 \cdot y + 3x \frac{dy}{dx} \right) + \frac{dy}{dx} = 0$$

$$2x - 3y - 3x \frac{dy}{dx} + \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} (1 - 3x) = 3y - 2x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3y - 2x}{1 - 3x}$$

$$c) x^2 y^2 + 4xy^2 - 5x = 1$$

$$\left(2xy^2 + x^2 2y \frac{dy}{dx} \right) + \left(4y^2 + 4x 2y \frac{dy}{dx} \right) - 5 = 0$$

$$\frac{dy}{dx} (x^2 2y + 4x 2y) = 5 - 4y^2 - 2xy^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{5 - 4y^2 - 2xy^2}{x^2 2y + 4x 2y}$$

$$= \frac{-y^2(4 + 2x) + 5}{2y(x^2 + 4x)}$$

$$f, \sin x + \cos y = x$$

$$\cos x - \sin y \cdot \frac{dy}{dx} = 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 - \cos x}{-\sin y}$$

$$= \frac{\cos x - 1}{\sin y}$$

$$g, \sin(x^3 y^2) = x$$

$$\cos(x^3 y^2) \cdot \left(3x^2 y^2 + x^3 2y \frac{dy}{dx} \right) = 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 - \cos(x^3 y^2) 3x^2 y^2}{\cos(x^3 y^2) x^3 2y}$$

Delkapittel 7.3

oppgave 2

Likningen til tangenten er gitt ved:

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

$$a) \quad y - 2x^2 + x - 1 = 0 \quad (1,2)$$

Benytter implisitt derivasjon for å finne $\frac{dy}{dx}$:

$$\frac{dy}{dx} - 4x + 1 = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = 4x - 1$$

Videre er vi gitt at $x=1$ og $y=2$. Dette gir:

$$\frac{dy}{dx} = 4 \cdot 1 - 1 = 3$$

Tangentens likning blir:

$$\begin{aligned} y &= 3(x-1) + 2 \\ &= 3x - 3 + 2 = \underline{\underline{3x - 1}} \end{aligned}$$

$$b) \quad x^2 - 3y^2 - 4x - 2 = 0 \quad (-1,1)$$

$$2x - 6y \cdot \frac{dy}{dx} - 4 = 0$$

| benytter kjerneregelen

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4-2x}{-6y}$$

Vi er gitt at $x=-1$ og $y=1$. Dette gir:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4 - (2 \cdot (-1))}{-6 \cdot 1} = \frac{6}{-6} = -1$$

Tangentens likning blir:

$$y = -1(x - (-1)) + 1$$

$$\underline{\underline{y = -x}}$$

oppgave 2

c) $x^2 + 2xy^2 - \ln x + 2y = 5 \quad (1, -2)$

$$2x + [2 \cdot y^2 + 2y \frac{dy}{dx} \cdot 2x] - \frac{1}{x} + 2 \frac{dy}{dx} = 0$$

$$2 \frac{dy}{dx} (2xy + 1) = \frac{1}{x} - 2y^2 - 2x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{1}{x} - 2y^2 - 2x}{2(2xy + 1)}$$

$x=1$ og $y=-2$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 - 8 - 2}{2(-4 + 1)} = \frac{-9}{-6} = \frac{3}{2}$$

$$y = \frac{3}{2} (x - 1) - 2$$

$$= \underline{\underline{\frac{3}{2}x - \frac{7}{2}}}$$

d) $\cos x - x \sin y + y + 1 = 0 \quad (\pi, 0)$

$$-\sin x + [-1 \sin y + (-x) \cos y \frac{dy}{dx}] + \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} (1 - x \cos y) = \sin x + \sin y$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin x + \sin y}{(1 - x \cos y)} = 0$$

$$y = 0(x - \pi) + 0 = \underline{\underline{0}}$$

Delkapittel 7.4

oppgave 1

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2}$

1. Både teller og nevner går mot null når $x \rightarrow 2$
2. Både teller og nevner er deriverbare

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2}{1} = \underline{\underline{12}}$$

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos(\pi x) + 1}{x - 1}$

1. Både teller og nevner går mot null når $x \rightarrow 1$
2. Både teller og nevner er deriverbare

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos(\pi x) + 1}{x - 1} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-\pi \sin(\pi x)}{1} = \frac{0}{1} = \underline{\underline{0}}$$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - e^{-3x}}{\sin(2x)}$

1. Både teller og nevner går mot null når $x \rightarrow 0$
2. Både teller og nevner er deriverbare

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - e^{-3x}}{\sin(2x)} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3e^{3x} + 3e^{-3x}}{2\cos(2x)} = \frac{3 + 3}{2} = \underline{\underline{3}}$$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^{-1}(x) - 2x}{x - \tan^{-1}(2x)}$

1. Både teller og nevner går mot null når $x \rightarrow 0$
2. Både teller og nevner er deriverbare

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^{-1}(x) - 2x}{x - \tan^{-1}(2x)} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - 2}{1 - \frac{1}{1-(2x)^2} \cdot 2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - 2}{1 - \frac{2}{1-4x^2}} = \frac{1 - 2}{1 - 2} = \frac{-1}{-1} = \underline{\underline{1}}$$

Oppgave 1

$$e) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{4x} - 1}{5x^2}$$

1. Både teller og nevner går mot null når $x \rightarrow 0$
2. Både teller og nevner er deriverbar

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{4x} - 1}{5x^2} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4e^{4x}}{10x}$$

Vi kan ikke benytte L'Hôpital's regel videre da telleren går mot 4 mens nevneren går mot null. Siden $10x$ er deriverbar, eksisterer ikke grenseverdien

$$f) \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - \cos t}{1 - \sqrt{t+1}}$$

1. Både teller og nevner går mot null når $x \rightarrow 0$
2. Både teller og nevner er deriverbar

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - \cos t}{1 - \sqrt{t+1}} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t + \sin t}{-\frac{1}{2}(t+1)^{-\frac{1}{2}}} = \frac{1}{-\frac{1}{2}} = \underline{\underline{-2}}$$

$$g) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{e^x + e^{-x} - 2}$$

1. Både teller og nevner går mot null når $x \rightarrow 0$
2. Både teller og nevner er deriverbar

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{e^x + e^{-x} - 2} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + x \cos x}{e^x - e^{-x}} = \left(\frac{0}{0} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x + (\cos x - x \sin x)}{e^x + e^{-x}} = \frac{2}{2} = \underline{\underline{1}}$$

Bruker L'Hôpital's regel to ganger!

oppgave 2

Finn konstanten k slik at $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - k}{x-1}$ har en grenseverdi

Bestem så grenseverdien.

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - k}{x-1}$ er kun ubestemt av formen $(0/0)$ dersom

$$\underline{k=2}$$

Dermed er betingelsene for L'Hôpital's regel oppfylt og vi finner følgende grenseverdi.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x-1} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{2}(x+3)^{-\frac{1}{2}}}{1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \underline{\underline{\frac{1}{4}}}$$