

Løsningsforslag til oppgaver i Kapittel 5

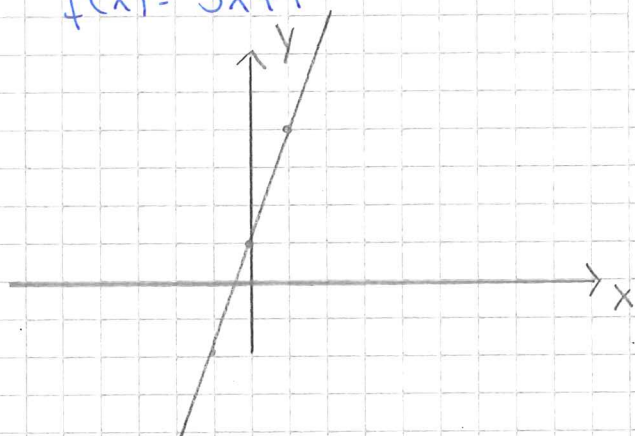
Delkapittel 5.1:

oppgave 1

Angi den naturlige definisjonsmengde og den tilførende verdimengde til hver funksjon f gitt ved $f(x)$

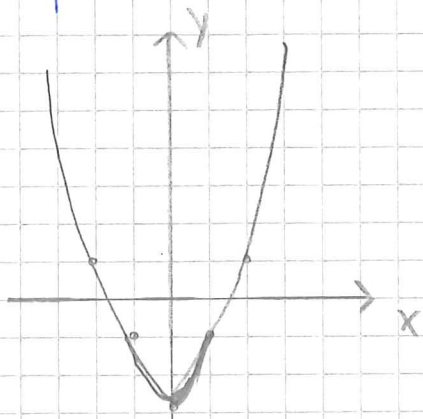
a)

$$f(x) = 3x + 1$$



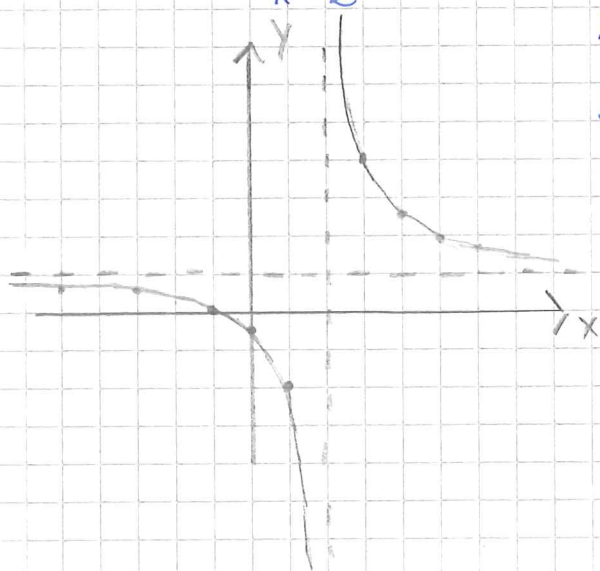
$\mathbb{R}$ (definisjonsmengde)
 $\mathbb{R}$ (verdimengde)

b) $f(x) = 2x^2 - 3$



$\mathbb{R}$ (definisjonsmengde)
 $f(x) \geq -3$ (verdimengde)

c) $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$

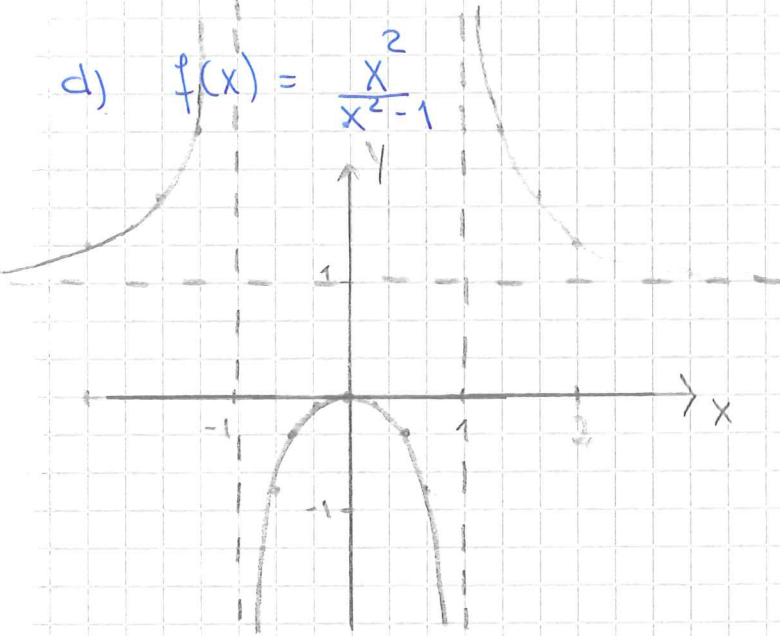


$x \neq 2$ (definisjonsmengde)
 $f(x) \neq 1$ (verdimengde)

d) $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 1}$

$x \neq \pm 1$ (Definitionsmenge)

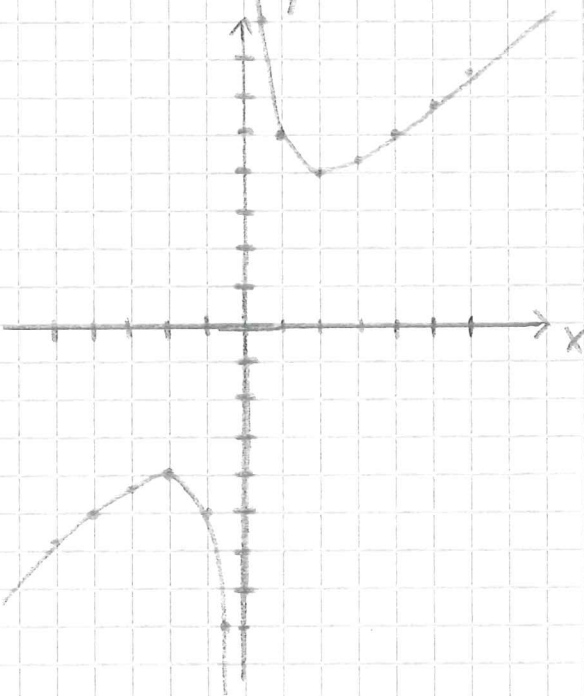
$\left. \begin{array}{l} f(x) > 1 \\ f(x) \leq 0 \end{array} \right\}$ (Wertemenge)



e) $f(x) = x + \frac{4}{x}$

$x \neq 0$ (Definitionsmenge)

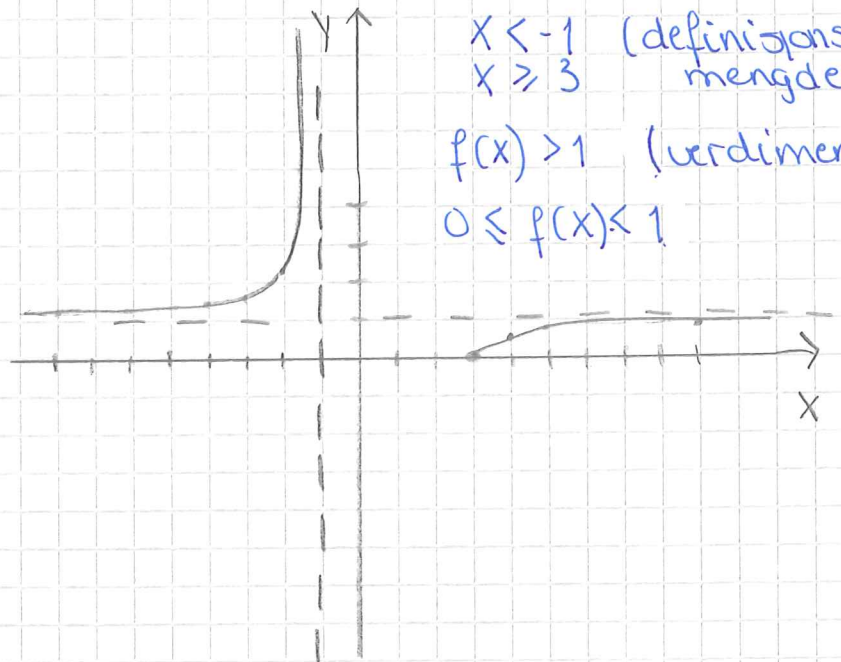
$\left. \begin{array}{l} f(x) \geq 4 \\ f(x) \leq -4 \end{array} \right\}$ (Wertemenge)



f) $f(x) = \sqrt{\frac{x-3}{x+1}}$

$\left. \begin{array}{l} x < -1 \\ x \geq 3 \end{array} \right\}$ (Definitionsmenge)

$f(x) > 1$ (Wertemenge)
 $0 \leq f(x) < 1$



oppgave 7

Beregn eventuell grenseverdi i hvert tilfelle

$$a) \lim_{x \rightarrow 2} (3x+2) = 3 \cdot 2 + 2 = \underline{\underline{8}}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -2} (-2x+5) = -2 \cdot (-2) + 5 = \underline{\underline{9}}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 1^+} (-4) = \underline{\underline{-4}}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(3x-1)}{(2x+5)} = \frac{3 \cdot 0 - 1}{2 \cdot 0 + 5} = -\frac{1}{5}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x^2+1)}{-4x+7} = \frac{(-2)^2+1}{-4 \cdot (-2)+7} = \frac{5}{15} = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \underline{\underline{4}}$$

Siden $\frac{(x^2-4)}{(x-2)} = \frac{(x+2)(\cancel{x-2})}{(\cancel{x-2})} = x+2$ og $\lim_{x \rightarrow 2} (x+2) = 4$
 $\uparrow$ 3. kvadratsetn.

$$g) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+2x-3}{x^2-3x+2} = \underline{\underline{-4}}$$

Siden $\frac{x^2+2x-3}{x^2-3x+2} = \frac{(\cancel{x-1})(x+3)}{(\cancel{x-1})(x-2)} = \frac{x+3}{x-2}$ og $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+3)}{(x-2)} = \frac{4}{-1} = -4$
 $\uparrow$ benytter den generelle løsningen av en andregradsligning (også Rull ABC formelen)

Teorem 1.3:

La a, b og c være reelle tall.

Likningen $ax^2+bx+c=0$ har følgende løsninger:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \text{dersom } a \neq 0 \text{ og } (b^2-4ac) \geq 0$$

Ekse:

$x^2+2x-3=0$ kan løses ved denne formelen Siden $a=1$ (dvs. $\neq 0$) og $(b^2-4ac) = (2^2-4 \cdot 1 \cdot (-3)) = 16$ (dvs. > 0)

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2-4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm 4}{2}$$

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \frac{-2-4}{2} = -\frac{6}{2} = -3 \\ x_2 &= \frac{-2+4}{2} = \frac{2}{2} = 1 \end{aligned} \right\} \text{ gir at } x^2+2x-3 = (x-1)(x+3)$$

$$h) \lim_{x \rightarrow 0,5} \frac{2x-1}{2x^2-3x+1} = \underline{\underline{-2}}$$

$$\text{Siden } \frac{(2x-1)}{(2x-1)(x-1)} = \frac{1}{x-1} \quad \text{og} \quad \lim_{x \rightarrow 0,5} \frac{1}{x-1} = \frac{1}{-\frac{1}{2}} = -2$$

der: $2x^2 - 3x + 1 = 0$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{4}$$

$$x_1 = \frac{3+1}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

$$x_2 = \frac{3-1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\left. \begin{array}{l} x_1 = \frac{3+1}{4} = \frac{4}{4} = 1 \\ x_2 = \frac{3-1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \end{array} \right\} \begin{array}{l} 2x^2 - 3x + 1 \\ = 2(x - 1/2)(x - 1) \\ = \underline{(2x-1)(x-1)} \end{array}$$

$$i) \lim_{x \rightarrow -1,5} \frac{x^2 + 1,5x}{(2x+3)^2} = \underline{\underline{-\infty}}$$

$$\text{Siden } \frac{x^2 + 1,5x}{(2x+3)^2} = \frac{\frac{1}{2}x(2x+3)}{(2x+3)^2} = \frac{x}{2(2x+3)} = \frac{x}{4x+6}$$

$$\text{og} \quad \lim_{x \rightarrow -1,5} \frac{-1,5}{4 \cdot (-1,5) + 6} = -\infty$$

grenseverdien eksisterer ikke!

oppgave 11

Bestem $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ og $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ når

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 - x + 4 & x \leq 2 \\ -x^2 + 3 & x > 2 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (-x^2 + 3) = -2^2 + 3 = -4 + 3 = \underline{\underline{-1}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (3x^2 - x + 4) = 3 \cdot 2^2 - 2 + 4 = 12 - 2 + 4 = \underline{\underline{14}}$$

Siden $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ eksisterer ikke $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

oppgave 12

Bestem a slik at $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ eksisterer når

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 5x + 7 & x < -1 \\ -x^2 + 4 & x = -1 \\ ax + b & x > -1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} (x^2 + 5x + 7) = (-1)^2 - 5 \cdot 1 + 7 = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} (-x^2 + 4) = -(-1)^2 + 4 = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (ax + b) = a(-1) + b = 3 \quad (\text{for eksistens})$$

$$-a = 3 - b$$

$$-a = -3$$

$$\underline{\underline{a = 3}}$$

oppgave 1b

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{x^2-3x+2} & x \neq 1 \text{ og } 2 \\ 1 & x = 2 \end{cases}$$

- a) avgjør om f er kontinuertlig for $x=2$
 b) avgjør om f er kontinuertlig for $x=1$

$$\begin{array}{l} \lceil x^2 - 3x + 2 = 0 \\ x = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm 1}{2} \\ \left. \begin{array}{l} x_1 = \frac{3+1}{2} = 2 \\ x_2 = \frac{3-1}{2} = 1 \end{array} \right\} x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2) \\ \lfloor \end{array}$$

$$a) \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2-3x+2} = \underline{\underline{1}}$$

$$\text{Siden } \frac{x-2}{x^2-3x+2} = \frac{x-2}{(x-2)(x-1)} = \frac{1}{x-1} \text{ og } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x-1} = 1$$

$$\text{Videre er } f(2) = \underline{\underline{1}}$$

dus: $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 1$ og $f(2) = 1$ gir at f er kontinuertlig for $x=2$.

$$b) \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-2)}{(x-2)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-1} = \infty$$

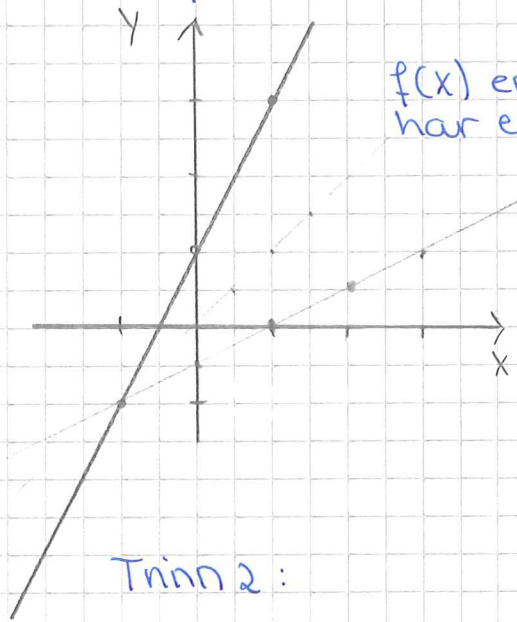
dus: $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ eksisterer ikke og f er derfor

diskontinuertlig for $x=1$

Oppgave 2

Forklar at hver funksjon f gitt $y = f(x)$ har en invers funksjon og bestem den.

a) $y = f(x) = 2x + 1 \quad x \in \mathbb{R}$



$f(x)$ er en-entydig og strengt voksende, dvs. $f(x)$ har en invers funksjon

Denne finner vi ved å følge trinn 1-3 i boka

Trinn 1: $y = f(x) = 2x + 1$

$$2x = y - 1$$

$$x = \frac{y-1}{2}$$

Trinn 3:

$$f^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}$$

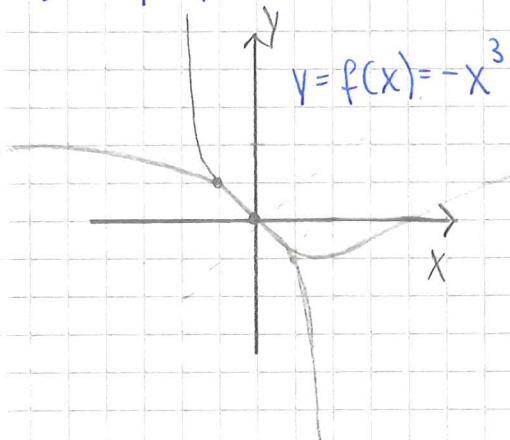
Trinn 2:

$$f^{-1}(y) = \frac{y-1}{2}$$

Definisjonsmengden til f^{-1} er lik verdimengden til f ,
dvs. $\mathbb{R}$

Vi får: $\underline{\underline{f^{-1}(x) = \frac{x-1}{2} \quad x \in \mathbb{R}}}$

b) $y = f(x) = -x^3 \quad x \in \mathbb{R}$



$f(x)$ er en-entydig og strengt avtagende, dvs. $f(x)$ har en invers funksjon.

Trinn 1: $y = f(x) = -x^3$

$$x^3 = -y$$

$$x = \sqrt[3]{-y}$$

Trinn 3:

$$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{-x}$$

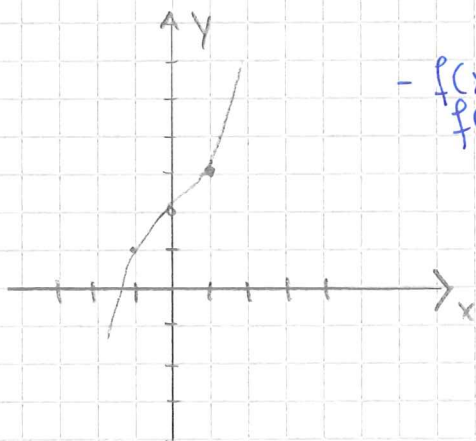
Trinn 2: $f^{-1}(y) = \sqrt[3]{-y}$

Definisjonsmengden til f^{-1} er lik verdimengden til f ,
dvs. $\mathbb{R}$

Vi får: $\underline{\underline{f^{-1}(x) = \sqrt[3]{-x} \quad x \in \mathbb{R}}}$

Oppgave 2 c.

$$y = f(x) = x^3 + 2 \quad x \in \mathbb{R}$$



- $f(x)$ er en-entydig og strengt voksende, dvs $f(x)$ har en invers funksjon

Trinn 1:

$$\begin{aligned} y &= f(x) = x^3 + 2 \\ x^3 &= y - 2 \\ x &= \sqrt[3]{y - 2} \end{aligned}$$

Trinn 2: $f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y - 2}$

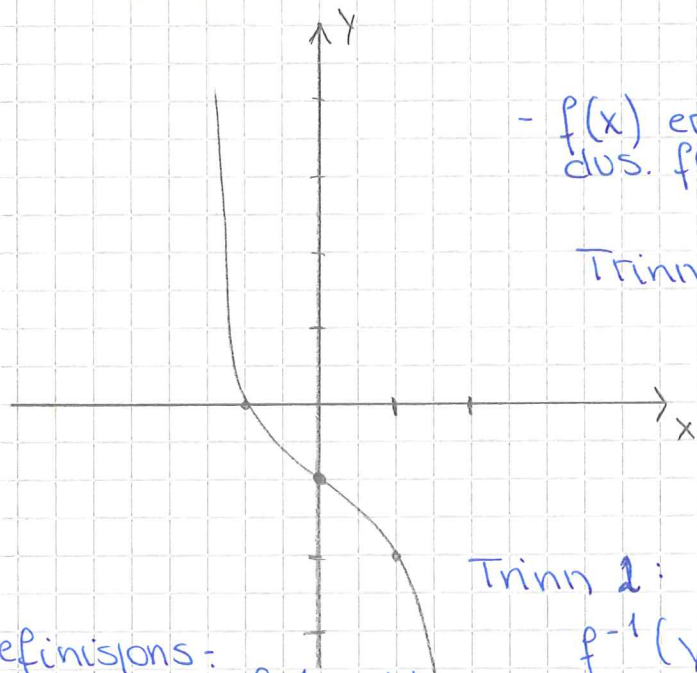
Trinn 3: $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x - 2}$

Definisjonsmengden til f^{-1} er lik verdimengden til f , dvs. $\mathbb{R}$

Vi får: $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x - 2} \quad x \in \mathbb{R}$

Oppgave 2 d

$$y = f(x) = -x^3 - 1 \quad x \in \mathbb{R}$$



- $f(x)$ er en-entydig og strengt avtagende, dvs. $f(x)$ har en invers funksjon

Trinn 1: $y = f(x) = -x^3 - 1$

$$-x^3 = y + 1$$

$$x^3 = -(y + 1)$$

$$x = \sqrt[3]{-(y + 1)}$$

Trinn 2:

$$f^{-1}(y) = \sqrt[3]{-(y + 1)}$$

Trinn 3:

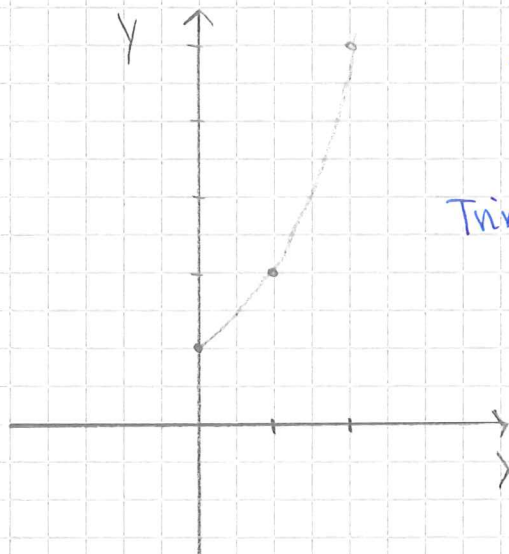
$$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{-(x + 1)}$$

Definisjons-
mengden til f^{-1} er lik
verdimengden til f ,
dvs. $\mathbb{R}$

Vi får: $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{-(x + 1)} \quad x \in \mathbb{R}$

oppgave 2 e

$$y = f(x) = x^2 + 1 \quad x \geq 0$$



- $f(x)$ er en-entydlig og strengt voksende, dvs. vi har en invers funksjon for $f(x)$

Trinn 1: $y = f(x) = x^2 + 1$
 $x^2 = y - 1$
 $x = \sqrt{y - 1}$

Trinn 2: $f^{-1}(y) = \sqrt{y - 1}$

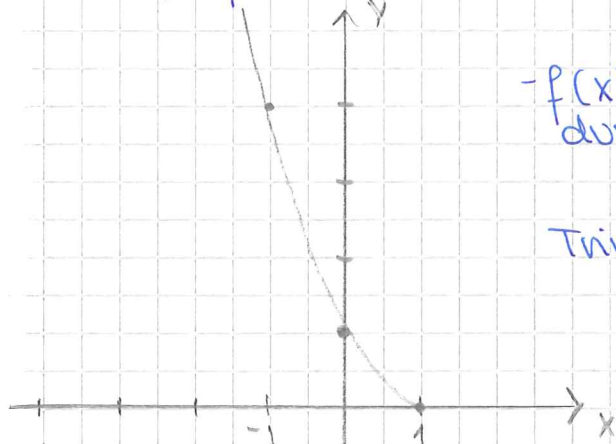
Trinn 3: $f^{-1}(x) = \sqrt{x - 1}$

Verdimengden til $f(x)$ er $f(x) \geq 1$
 Siden $f(0) = 1$. Definisjonsmengden til f^{-1} blir derfor $x \geq 1$.

Vi får: $f^{-1}(x) = \sqrt{x - 1} \quad x \geq 1$

oppgave 2 f

$$y = f(x) = (x - 1)^2 \quad x \leq 1$$



- $f(x)$ er en-entydlig og strengt avtagende, dvs. $f(x)$ har en invers funksjon.

Trinn 1: $y = f(x) = (x - 1)^2$
 $x - 1 = \pm\sqrt{y}$
 $x = -\sqrt{y} + 1$

} siden $x \leq 1$ må vi bruke $-$

Verdimengden til $f(x)$ er $f(x) \geq 0$ siden $f(1) = 0$.
 Definisjonsmengden til f^{-1} blir derfor $x \geq 0$

Trinn 2: $f^{-1}(y) = -\sqrt{y} + 1$

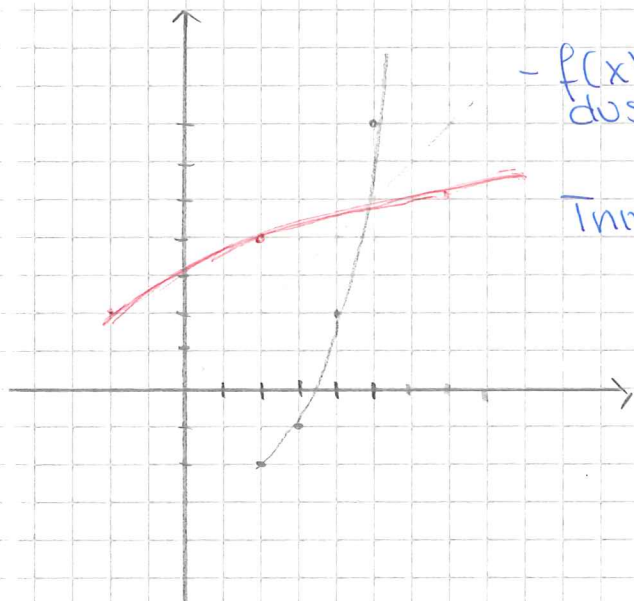
Trinn 3: $f^{-1}(x) = -\sqrt{x} + 1$

Vi får: $f^{-1}(x) = -\sqrt{x} + 1 \quad x \geq 0$

oppgave 2g

$$y = f(x) = x^2 - 4x + 2$$

$$x \geq 2$$



- $f(x)$ er en-entydig og strengt voksende, dvs. $f(x)$ har en invers funksjon.

Tinn 1 : $y = x^2 - 4x + 2$

$$y + 2 = x^2 - 4x + 4$$

$$y + 2 = (x - 2)^2$$

$$x - 2 = \pm \sqrt{y + 2}$$

$$x = \pm \sqrt{y + 2} + 2$$

$$x = \sqrt{y + 2} + 2$$

} siden $x \geq 2$
må vi
bruke +

Tinn 2 :

$$f^{-1}(y) = \sqrt{y + 2} + 2$$

Tinn 3 :

$$f^{-1}(x) = \sqrt{x + 2} + 2$$

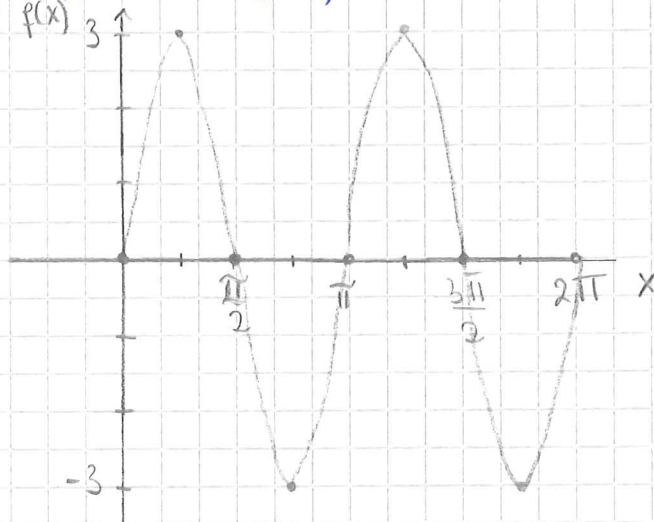
Verdimengden til $f(x)$ er $f(x) \geq -2$, siden $f(2) = -2$.
Definisjonsmengden til f^{-1} blir derfor $x \geq -2$.

Vi får : $f^{-1}(x) = \sqrt{x + 2} + 2$ $x \geq -2$

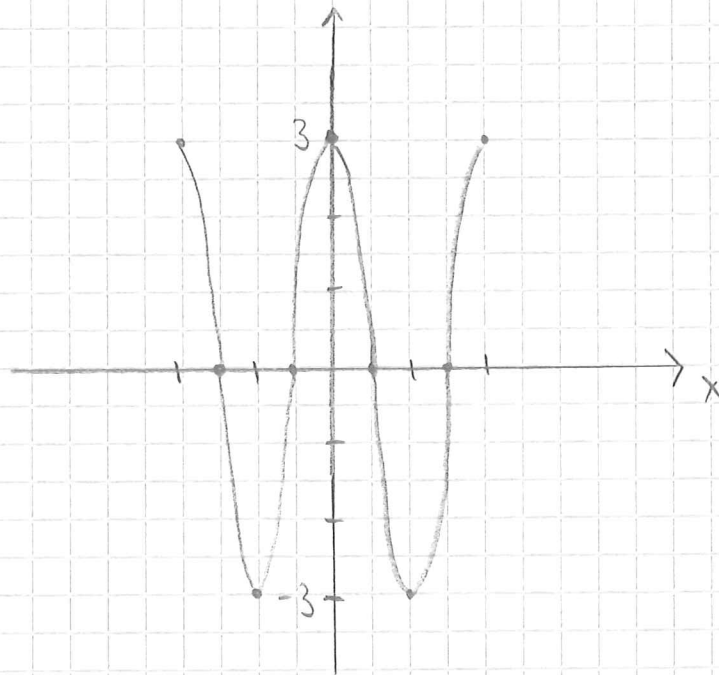
oppgave 5

Tegn grafen til hver funksjon f gitt ved $f(x)$

a) $f(x) = 3 \sin(2x)$ $0 \leq x \leq 2\pi$

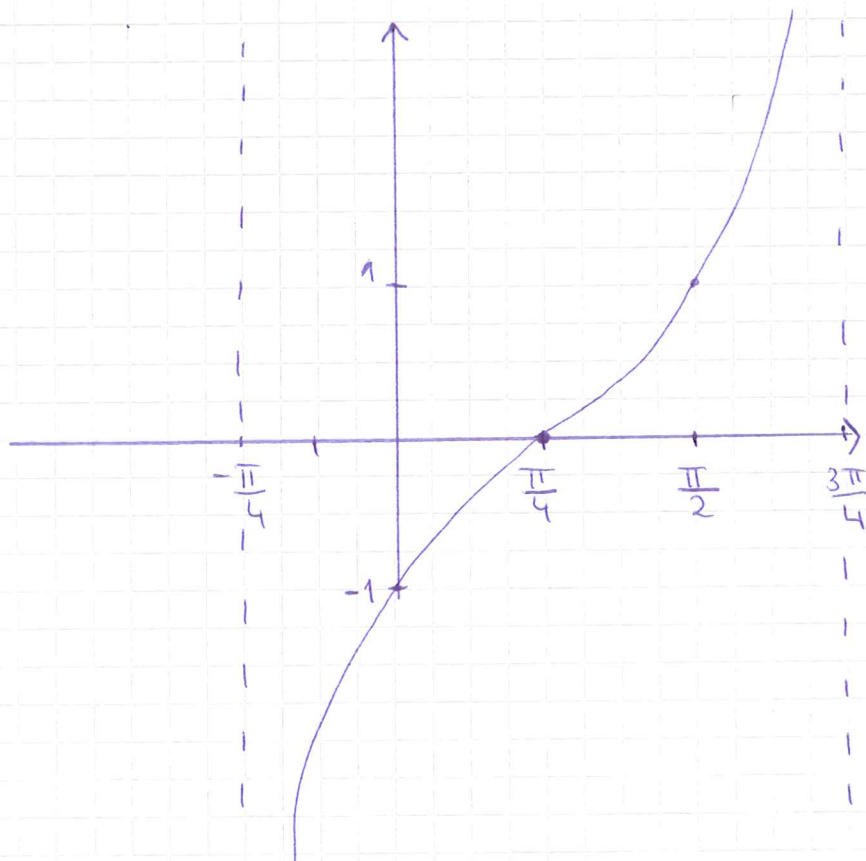


b) $f(x) = 3 \cos(2\pi x)$ $-1 \leq x \leq 1$



oppgave 5

e $f(x) = \tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ $-\frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4}$



oppgave 7

Finn x i hvert uttrykk.

$$a) \sin^{-1}(x) = \frac{\pi}{4}$$

$$y = \sin^{-1}(x) = \frac{\pi}{4} \quad \Leftrightarrow \quad \sin \frac{\pi}{4} = x$$

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2} = \underline{\underline{\frac{1}{2} \sqrt{2}}}$$

$$b) \sin^{-1}(2x) = -\frac{\pi}{6}$$

$$y = \sin^{-1}(2x) = -\frac{\pi}{6} \quad \Leftrightarrow \quad \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = 2x$$

$$2x = -\frac{1}{2}$$

$$x = \underline{\underline{-\frac{1}{4}}}$$

oppgave 14 (benytt teorem 5.6)

$$a) e^{3 \ln x} = e^{\ln x^3} = \underline{\underline{x^3}} \quad \text{Siden } e^{\ln x} = \ln e^x = x$$

$$b) e^{-2 \ln x} = e^{\ln x^{-2}} = x^{-2} = \underline{\underline{\frac{1}{x^2}}}$$

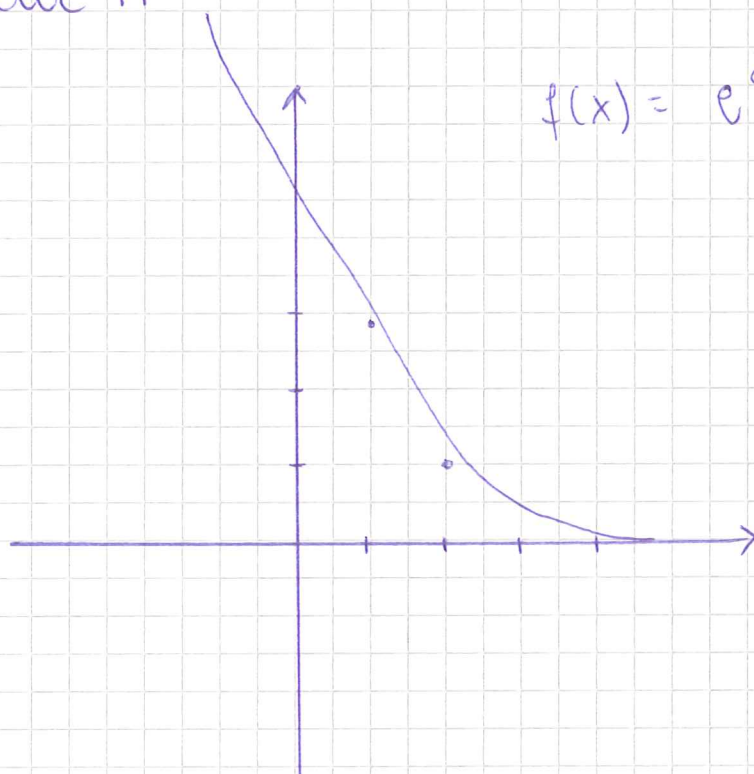
$$c) e^{\ln 2 + \ln x} = e^{\ln 2} \cdot e^{\ln x} = 2 \cdot x = \underline{\underline{2x}}$$

$$d) e^{-\ln\left(\frac{1}{x^2}\right)} = e^{\ln\left(\frac{1}{x^2}\right)^{-1}} = \left(\frac{1}{x^2}\right)^{-1} = \frac{1}{x^{-2}} = \underline{\underline{x^2}}$$

$$e) e^{-\ln\left(\frac{x}{e}\right)} = e^{\ln\left(\frac{x}{e}\right)^{-1}} = \left(\frac{x}{e}\right)^{-1} = \underline{\underline{\frac{e}{x}}}$$

oppgave 11

b)



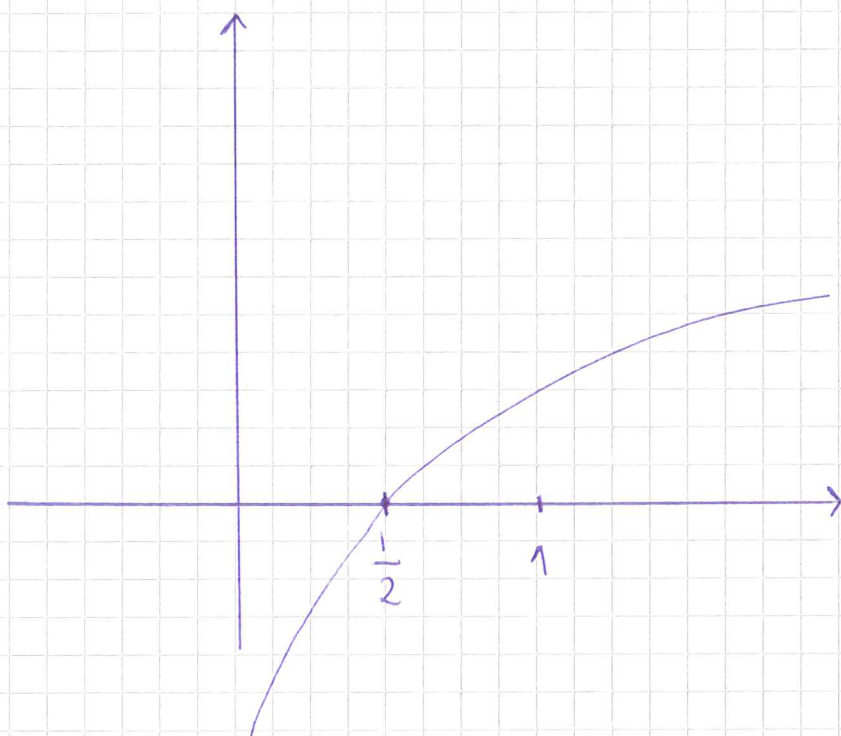
$$f(x) = e^{2-x}$$

$$x \in \mathbb{R}$$

c)

$$f(x) = \ln(2x)$$

$$x > 0$$



Oppgave 19

$$e^x = y$$

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad e^{2x} - 5e^x + 4 &= 0 \\ (e^x)^2 - 5e^x + 4 &= 0 \\ y^2 - 5y + 4 &= 0 \end{aligned}$$

Regel:

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$y = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 4}}{2}$$

$$y = \frac{5 \pm 3}{2}$$

$$y_1 = \frac{8}{2} = 4$$

$$y_2 = \frac{2}{2} = 1$$

$$y_1 = e^x = 4$$

$$\ln e^x = \ln 4$$

$$\underline{x = \ln 4}$$

$$y_2 = e^x = 1$$

$$\ln e^x = \ln 1$$

$$\underline{x = 0}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad (\ln x)^2 + 4 \ln x + 3 &= 0 \\ y^2 + 4y + 3 &= 0 \end{aligned}$$

$$y = \ln x$$

$$y = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 3}}{2}$$

$$y = \frac{-4 \pm 2}{2}$$

$$y_1 = \frac{-4 + 2}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

$$y_2 = \frac{-4 - 2}{2} = \frac{-6}{2} = -3$$

$$y_1 = \ln x = -1$$

$$e^{\ln x} = e^{-1}$$

$$\underline{x = e^{-1} = \frac{1}{e}}$$

$$y_2 = \ln x = -3$$

$$e^{\ln x} = e^{-3}$$

$$\underline{x = e^{-3} = \frac{1}{e^3}}$$

Delkapittel 5.3 :

1. Symmetri om y-aksen: $f(-x) = f(x)$
2. Symmetri om origo: $f(-x) = -f(x)$

oppgave 1

Angi eventuelle symmetriforhold til hver funksjon f

a) $y = f(x) = 3x^2 + 5, x \in \mathbb{R}$

$$f(-x) = 3(-x)^2 + 5 = 3x^2 + 5 = f(x)$$

∴ Vi har symmetri om y-aksen

b) $y = f(x) = -5x^4 + 2, x \in \mathbb{R}$

$$f(-x) = -5(-x)^4 + 2 = -5x^4 + 2 = f(x)$$

∴ Vi har symmetri om y-aksen

c) $y = f(x) = -x^6 + 4x, x \in \mathbb{R}$

$$f(-x) = -(-x)^6 + 4(-x)$$

$$= -x^6 - 4x \quad \therefore \text{Ingen symmetriforhold}$$

d) $y = f(x) = -7x^5 + 2x^3, x \in \mathbb{R}$

$$f(-x) = -7(-x)^5 + 2(-x)^3$$

$$= 7x^5 - 2x^3 = -f(x)$$

∴ Vi har symmetri om origo

e) $y = f(x) = \frac{x}{x^2 + 5}, x \in \mathbb{R}$

$$f(-x) = \frac{-x}{(-x)^2 + 5} = -\left(\frac{x}{x^2 + 5}\right) = -f(x)$$

∴ Vi har symmetri om origo

oppgave 2

Finn eventuelle asymptoter for hver funksjon f

a) $y = f(x) = \frac{3x+2}{x-2} \quad x \neq 2$

- Vertikale asymptoter kan forekomme der nevneren ikke er definert. dvs. $x=2$

$x \rightarrow 2^+$ medfører at $y \rightarrow +\infty$
 $x \rightarrow 2^-$ medfører at $y \rightarrow -\infty$ } $x=2$ er en vertikal asymptote

- horisontale asymptoter undersøkes ved å la $x \rightarrow \infty$ og $x \rightarrow -\infty$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x+2}{x-2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{2}{x}}{1 - \frac{2}{x}} = 3$$

$y=3$ er en horisontal asymptote

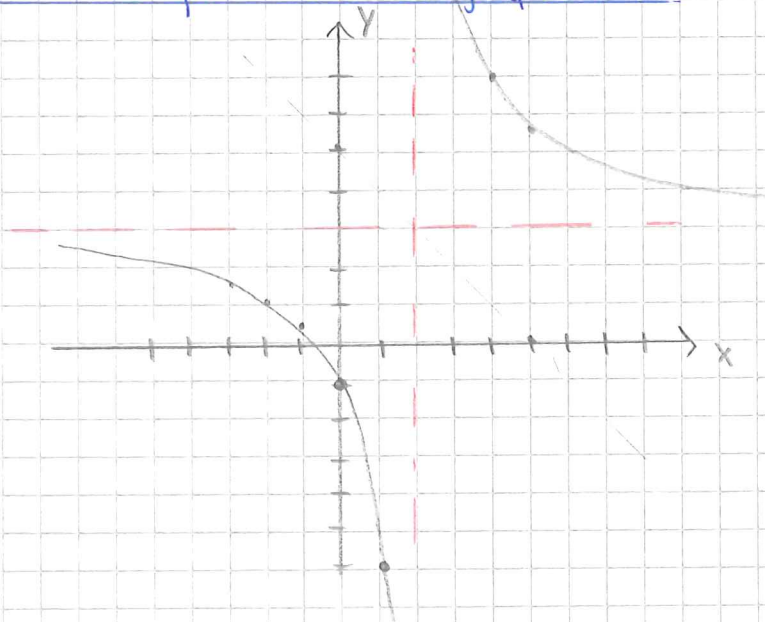
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x+2}{x-2} = 3 \quad (\text{viser det samme})$$

- Skrå asymptoter kan finnes ved å benytte definisjon 5.11

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x+2}{x(x-2)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{2}{x}}{x-2} = 0$$

$\therefore k=0$

Vi har ingen skrå asymptoter



oppgave 2

b) $y = f(x) = \frac{-4x-1}{x+3} \quad x \neq -3$

Vertikale asymptoter:

$$\begin{array}{ll} x \rightarrow -3^+ & \text{medfører at } y \rightarrow +\infty \\ x \rightarrow -3^- & \text{medfører at } y \rightarrow -\infty \end{array}$$

∴ $x = -3$ er en vertikal asymptote

horisontale asymptoter:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-4x-1}{x+3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-4 - \frac{1}{x}}{1 + \frac{3}{x}} = -4$$

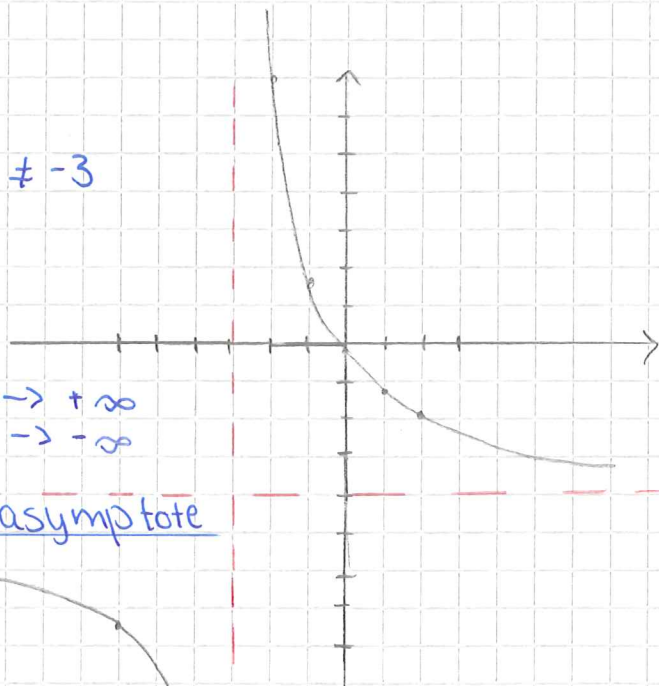
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4 - \frac{1}{x}}{1 + \frac{3}{x}} = -4$$

∴ $y = -4$ er en horisontal asymptote

skrå asymptoter:

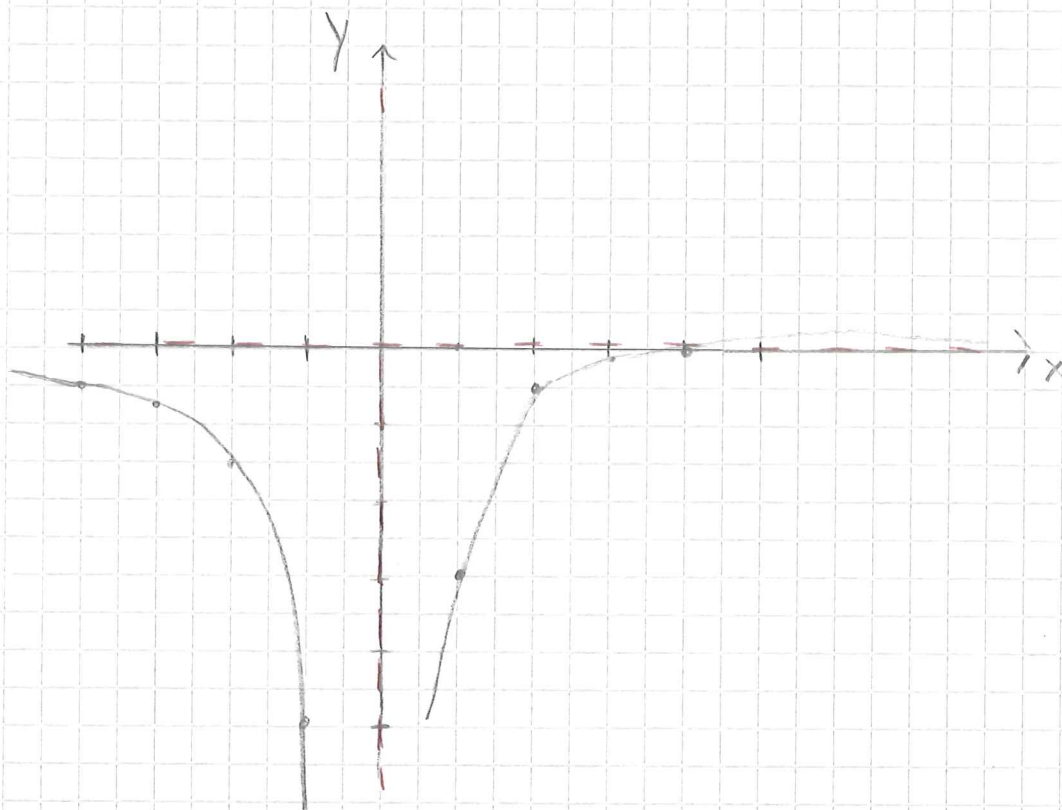
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{-4x-1}{x(x+3)} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-4 - \frac{1}{x}}{x+3} = 0$$

∴ $k=0$ og vi har ingen skrå asymptoter



oppgave 2

c) $y = f(x) = \frac{x-4}{x^2} \quad x \neq 0$



- Vertikale asymptoter

$$\begin{array}{l} x \rightarrow 0^+ \\ x \rightarrow 0^- \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{medfører at} \\ \text{" -"} \end{array} \quad \begin{array}{l} y \rightarrow -\infty \\ y \rightarrow -\infty \end{array}$$

∴ $x=0$ (nedre del) er vertikal asymptote.

- horisontale asymptoter

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-4}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x} - \frac{4}{x^2}}{1} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-4}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{1}{x} - \frac{4}{x^2}}{1} = 0 \end{aligned}$$

∴ $y=0$ er en horisontal asymptote

oppgave 2

d) $y = f(x) = \frac{2x}{x^2 - 1} \quad x \neq \pm 1$

- vertikale asymptoter:

$x \rightarrow 1^+$	medfører at	$y \rightarrow +\infty$
$x \rightarrow 1^-$		$y \rightarrow -\infty$
$x \rightarrow -1^+$	- " -	$y \rightarrow +\infty$
$x \rightarrow -1^-$	- " -	$y \rightarrow -\infty$

∴ $x=1$ og $x=-1$ er vertikale asymptoter

- horisontale asymptoter:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{x}}{1 - \frac{1}{x^2}} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{2}{x}}{1 - \frac{1}{x^2}} = 0$$

∴ $y=0$ er en horisontal asymptote

- skrå asymptote:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{x(x^2 - 1)} = 0$$

∴ $k=0$ og vi har ingen skrå asymptote

