

Delkapittel 11.1

oppgave 2

Vi skal bestemme om vektorene $[x_1 \ x_2]^T$ for hver gitte betingelse er et underrom av $\mathbb{R}^2$.

a) $x_1 + x_2 = 0$

Vi velger oss to vektorer u og v der betingelsen er oppfylt i samt en skalar k :

$$u = \begin{bmatrix} a \\ -a \end{bmatrix} \quad v = \begin{bmatrix} b \\ -b \end{bmatrix}$$

NB!

Addisjon:

$$u + v = \begin{bmatrix} a \\ -a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b \\ -b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+b \\ -(a+b) \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ (a+b) - (a+b) = 0 \end{cases}$$

Bet. er oppfylt!

Vi ser at betingelsen er oppfylt under addisjon, dvs vektorene $[x_1 \ x_2]^T$ der $x_1 + x_2 = 0$ er lukket under addisjon.

Skalarmultiplikasjon:

$$ku = k \begin{bmatrix} a \\ -a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka \\ -ka \end{bmatrix}$$

Vi ser at betingelsen også er oppfylt under skalarmultiplikasjon, dvs vektorene $[x_1 \ x_2]^T$ der $x_1 + x_2 = 0$ er lukket under skalarmultiplikasjon.

→ Vektorene $[x_1 \ x_2]^T$, der $x_1 + x_2 = 0$ er derfor et underrom av $\mathbb{R}^2$.

oppgave 2

b) $x_1 \cdot x_2 = 0$

Vi velger oss to vektorer u og v der betingelsen er oppfylt, samt en skalar k .

$$u = \begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix} \quad v = \begin{bmatrix} 0 \\ c \end{bmatrix}$$

addisjon

NB!

$$u+v = \begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+0 \\ 0+c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}$$

$\begin{cases} x_1 \cdot x_2 = 0 \\ a \cdot c \neq 0 \\ \text{bet. ikke} \\ \text{oppfylt!} \end{cases}$

Vi ser at betingelsen ikke er oppfylt under addisjon, dvs vektorene $[x_1 \ x_2]^T$ der $x_1 \cdot x_2 = 0$ er ikke lukket under addisjon.

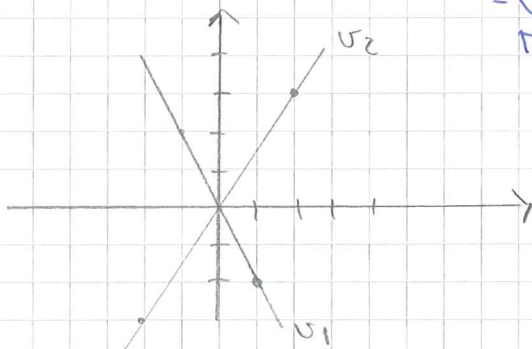
$\rightarrow$ Vektorene $[x_1 \ x_2]^T$ der $x_1 \cdot x_2 = 0$ er derfor ikke et underrom av $\mathbb{R}^2$

oppgave 10

utspenner vektorene $\mathbb{R}^2$?

a) $u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ $u_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

Siden u_1 og u_2 er vektorer i $\mathbb{R}^2$, så er $\text{span}\{u_1, u_2\}$ et underrom av $\mathbb{R}^2$



- Vi ser av figuren at underrommet utspenner hele $\mathbb{R}^2$

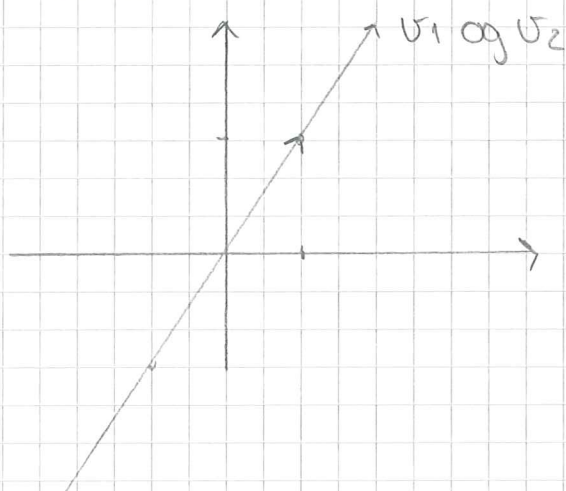
u_1 og u_2 er lineært uavh.

b) $u_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ $u_2 = \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \end{bmatrix}$

Siden u_1 og u_2 egentlig er den samme vektoren får vi at:

Siden u_1 er en vektor i $\mathbb{R}^2$, så er $\text{span}\{u_1\}$ et underrom av $\mathbb{R}^2$

Men dette underrommet utspenner ikke hele $\mathbb{R}^2$.



u_1 og u_2 er lineært avh.

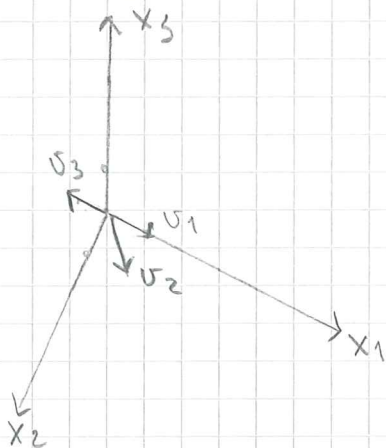
NB! Vi må ha ^{minst} to lineært uavh. vektorer for å utspenne $\mathbb{R}^2$.

Oppgave 11

Utspenner vektorene $\mathbb{R}^3$?

$$a) \quad v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Siden v_1, v_2 og v_3 er vektorer i $\mathbb{R}^3$, så er $\text{span}\{v_1, v_2, v_3\}$ et underrom av $\mathbb{R}^3$



Vi ser av figuren at underrommet utspenner hele $\mathbb{R}^3$

v_1, v_2 og v_3 er lineært uavh.

$$b) \quad v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad v_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

→ Vi vet fra oppgave 6 a), at v_1, v_2 og v_3 utspenner $\mathbb{R}^3$

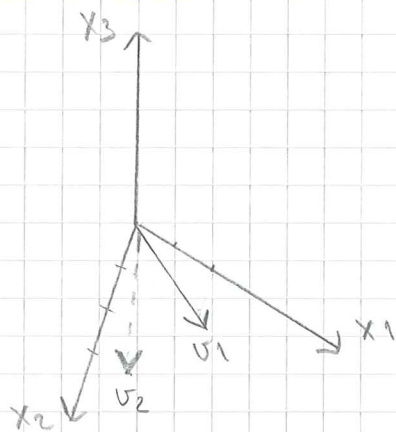
→ v_4 er en lineær kombinasjon av v_1, v_2 og v_3
($v_4 = 4v_1 - 2v_2 + v_3$)

→ Siden v_1, v_2 og v_3 utspenner $\mathbb{R}^3$, så utspenner også v_1, v_2, v_3 og v_4 $\mathbb{R}^3$.

oppgave 11

c) $v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$

Siden v_1 og v_2 er vektorer i $\mathbb{R}^3$, så er $\text{span}\{v_1, v_2\}$ et underrom av $\mathbb{R}^3$



Vi ser av figuren at underrommet ikke utspenner hele $\mathbb{R}^3$

v_1 og v_2 er lineært uavh.

NB! Vi må ha ^{minst} 3 vektorer for å utspenne $\mathbb{R}^3$, der vektorene er uavh.

oppgave 12

Er vektorene lineært uavhengige?

a) $v_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix}$ $v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$

① Vi setter først opp en lineær kombinasjon av vektorene:

$$k_1 v_1 + k_2 v_2 = 0$$

$$k_1 \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

② Dette gir følgende lineære likn. system og totalmatrise:

$$4k_1 + 2k_2 = 0$$

$$-3k_1 + 5k_2 = 0$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 4 & 2 & 0 \\ -3 & 5 & 0 \end{array} \right] \cdot \left(\frac{1}{4} \right) = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1/2 & 0 \\ -3 & 5 & 0 \end{array} \right] \begin{matrix} \textcircled{3} \\ \leftarrow \end{matrix}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 7/2 & 0 \end{array} \right] \cdot \left(\frac{2}{7} \right) = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \begin{matrix} \uparrow \\ \textcircled{-\frac{1}{2}} \end{matrix} = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

→ Vi ser at vi bare får den trivielle løsningen $k_1 = k_2 = 0$,
dvs. vektorene er lineært uavh.

b) $v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ $v_2 = \begin{bmatrix} -6 \\ 3 \end{bmatrix}$

① $k_1 v_1 + k_2 v_2 = 0$

$$k_1 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} -6 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

② $\left. \begin{array}{l} 2k_1 - 6k_2 = 0 \\ -k_1 + 3k_2 = 0 \end{array} \right\} \left[\begin{array}{cc|c} 2 & -6 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \end{array} \right] \cdot \left(\frac{1}{2} \right) =$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \end{array} \right] \begin{matrix} \textcircled{1} \\ \leftarrow \end{matrix} = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

→ Vi ser at likn. systemet reduseres til en likn. $k_1 - 3k_2 = 0$
der k_3 er en fri variabel. Vi kan få andre løsninger enn den
trivielle, derfor har vi lineær uavhengighet. 7.

oppgave 13

$$b) \quad v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix} \quad v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Vi sjekker om vektorene er lineært uavh.:

$$① \quad k_1 v_1 + k_2 v_2 + k_3 v_3 = 0$$

$$k_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} + k_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$② \quad \left. \begin{array}{l} k_1 + 2k_2 = 0 \\ -k_2 + 5k_3 = 0 \\ -3k_1 + 2k_2 + 3k_3 = 0 \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 5 \\ -3 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 0 \\ -3 & 2 & 3 & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} \textcircled{3} \\ \leftarrow \end{array} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 0 \\ 0 & 8 & 3 & 0 \end{array} \right] \cdot (-1) =$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 8 & 3 & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} \textcircled{-8} \\ \leftarrow \end{array} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 43 & 0 \end{array} \right] \cdot \left(\frac{1}{43} \right) =$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} \leftarrow \textcircled{5} \\ \leftarrow \end{array} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} \leftarrow \textcircled{-2} \\ \leftarrow \end{array} =$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

Vi ser at vektorene v_1, v_2 og v_3 er lineært uavh. og de utspenner $\mathbb{R}^3$ (minimalt antall)

2: vektormengden er basis for $\mathbb{R}^3$

oppgave § 13

$$c) \quad v_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad v_2 = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix} \quad v_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Vi sjekker om vektorene er lineært uavh.

$$1) \quad k_1 v_1 + k_2 v_2 + k_3 v_3 = 0$$

$$k_1 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix} + k_3 \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$2) \quad \begin{array}{rcl} 3k_1 - 4k_2 - k_3 & = & 0 \\ k_1 & -3k_3 & = 0 \\ 2k_1 - 3k_2 & = & 0 \end{array} = \begin{bmatrix} 3 & -4 & -1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 2 & -3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -4 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 0 \end{array} \right] \cdot \begin{pmatrix} 1/3 \end{pmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -4/3 & -1/3 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 0 \end{array} \right] \begin{matrix} \text{①} \\ \text{②} \\ \text{③} \end{matrix} =$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -4/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & 4/3 & -8/3 & 0 \\ 0 & -1/3 & 2/3 & 0 \end{array} \right] \cdot (3/4) = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -4/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1/3 & 2/3 & 0 \end{array} \right] \begin{matrix} \text{③} \\ \text{①} \\ \text{②} \end{matrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -4/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

→ Vi ser at tredje lkn. forsvinner, dvs vi har flere ukjente enn antall lkn.

→ k_3 er da en fri variabel som kan settes lik 0, vi har med andre ord lineær avhengighet mellom vektorene og vektormengden utgjør ikke en basis for $\mathbb{R}^3$ (siden vi må ha tre lin. uavh. vektorer for å utspenne $\mathbb{R}^3$).

oppgave 13

$$d) \quad v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} \quad v_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix} \quad v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad v_4 = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

- Siden nullvektoren v_3 er med i vektormengden utgjør vektormengden ikke noen basis for $\mathbb{R}^3$.

Dette kan vises på følgende måte:

$$k_1 v_1 + k_2 v_2 + k_3 v_3 + k_4 v_4 = 0$$

$$k_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix} + k_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + k_4 \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Vi ser at lineær kombinasjonen kan være lik null, selv om k_3 er lik null.

Vi har derfor ikke kun den trivelle løsningen, dvs vektorene er lineært avhengige og vektormengden utgjør ikke en basis for $\mathbb{R}^3$.

$$e) \quad v_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} \quad v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}$$

- Vi trenger tre lineært uavh. vektorer for å utspenne $\mathbb{R}^3$. Siden vi kun har to vektorer, utgjør vektormengden ikke en basis for $\mathbb{R}^3$.

oppgave 16

a) Vi skal bestemme koordinatvektor x_B når u er gitt

$$x_S = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$$

Vi har at:

$$x_B = U^{-1} x_S$$

der U er koordinat-skiftematriksen fra basis B til standardbasen S .

Dette betyr at koordinat-skiftematriksen fra basis S til basis B er gitt ved U^{-1} . U og U^{-1} er gitt ved:

$$U = [u_1, u_2] = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$U^{-1} = \frac{1}{1 \cdot 3 - 1 \cdot (-2)} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$x_B = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$b) \quad x_S = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad B = \left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$$

Vi har at: $x_B = U^{-1} x_S$

$$\begin{aligned} \text{der } U &= \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{og } U^{-1} = \frac{1}{-2 \cdot 3 - 5(-1)} \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$x_B = \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \end{bmatrix}$$

oppgave ~~18~~ 19

$$b_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} \quad b_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix} \quad c_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix} \quad c_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \end{bmatrix}$$

→ Koordinatskiftematriksen fra basis B til standardbasen S er gitt ved:

$$U = [b_1 \ b_2] = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \quad x_S = U x_B$$

→ Koordinatskiftematriksen fra S til B er gitt ved:

$$U^{-1} = \frac{1}{20+6} \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \quad x_B = U^{-1} x_S$$

→ Koordinatskiftematriksen fra C til S er gitt ved:

$$V = [c_1 \ c_2] = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} \quad x_S = V x_C$$

→ Koordinatskiftematriksen fra S til C er gitt ved:

$$V^{-1} = \frac{1}{-24-2} \begin{bmatrix} 8 & -1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \quad x_C = V^{-1} x_S$$

Vi har at:

$$x_B = U^{-1} x_S = U^{-1} V x_C$$

$$x_C = V^{-1} x_S = V^{-1} U x_B$$

→ Koordinatskiftematriksen fra C til B er gitt ved:

$$U^{-1} V = \frac{1}{26} \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11/26 & 21/26 \\ 17/26 & 29/26 \end{bmatrix}$$

→ Koordinatskiftematriksen fra B til C er gitt ved:

$$V^{-1} U = \frac{-1}{26} \begin{bmatrix} 8 & -1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -29/26 & 21/26 \\ 17/26 & 11/26 \end{bmatrix}$$

Delkapittel 11.2

oppgave 1

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ og } T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, T(x) = Ax$$

Vi skal finne bildene under T av $u = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ og $v = \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \end{bmatrix}$.

$$T(u) = Au = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$T(v) = Av = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ -4 \end{bmatrix}$$

oppgave 4

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -2 \\ 8 & -5 \end{bmatrix} \text{ og } T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, T(x) = Ax$$

Vi skal finne bildene under T av $u = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$ og $v = \begin{bmatrix} -3 \\ -5 \end{bmatrix}$.

$$T(u) = Au = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -2 \\ 8 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ -9 \end{bmatrix}$$

$$T(v) = Av = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -2 \\ 8 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

oppgave 5

T er definert ved $T(x) = Ax$.

Finn en vektor x sss bilde under T er b

$$a) A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Vi får følgende totalmatrise:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 5 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 4 \end{array} \right] \xrightarrow{\textcircled{-2}} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{array} \right] \textcircled{-1}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{array} \right] \xrightarrow{\textcircled{-3}} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & -2 \end{array} \right]$$

$$\text{D: } X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$b) A = \begin{bmatrix} 7 & -4 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} -3 \\ -5 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 7 & -4 & -3 \\ -3 & 2 & -5 \end{array} \right] \cdot 1/7 = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -4/7 & -3/7 \\ -3 & 2 & -5 \end{array} \right] \xrightarrow{\textcircled{6}}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -4/7 & -3/7 \\ 0 & 4/7 & -88/7 \end{array} \right] \cdot \left(\frac{7}{4} \right) = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -4/7 & -3/7 \\ 0 & 1 & -22 \end{array} \right] \xrightarrow{\textcircled{4/7}}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -13 \\ 0 & 1 & -22 \end{array} \right]$$

$$\text{D: } X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -13 \\ -22 \end{bmatrix}$$

oppgave 6

T er definert ved $T(x) = Ax$

Finn alle vektorer x viss bilde under T er b

$$a) A = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} -6 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$T(x) = b$$

$$T(x) = Ax = b$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Vi får følgende totalmatrise:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & -4 & -6 \\ -1 & 2 & 3 \end{array} \right] \cdot \textcircled{1/2} = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & -3 \\ -1 & 2 & 3 \end{array} \right] \textcircled{+}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Vi ser at x_2 er en fri variabel og får at:

$$x_1 = 2x_2 - 3$$

$$c) \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} x_2$$

oppgave 11

$T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ er en lineær transformasjon som avbilder

$$u = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} = T(u)$$

$$v = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = T(v)$$

Siden T er lineær har vi at:

$$\textcircled{1} T(u+v) = T(u) + T(v)$$

$$\textcircled{2} T(ku) = k T(u)$$

$$a) T(2u) = 2 T(u) = 2 \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$b) T(3v) = 3 T(v) = 3 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} c) T(2u+3v) &= T(2u) + T(3v) \\ &= 2 T(u) + 3 T(v) \\ &= 2 \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 12 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Delkapittel 11.3

oppgave 6

Vi skal bestemme egenverdier og egenvektorsettene til hver matrise

$$a) A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Vi finner egenverdiene ved å løse:

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

$$\det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 5 \\ 3 & 4-\lambda \end{bmatrix} = (2-\lambda)(4-\lambda) - 5 \cdot 3$$

$$= 8 - 2\lambda - 4\lambda + \lambda^2 - 15$$

$$= \lambda^2 - 6\lambda - 7 = 0$$

$$\lambda = \frac{6 \pm \sqrt{36 + 4 \cdot 7}}{2}$$

$$\lambda_1 = \frac{6+8}{2} = \frac{14}{2} = 7$$

$$\lambda_2 = \frac{6-8}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

Egenvektorsettet tilhørende $\lambda = 7$ er gitt ved å løse

$$(A - \lambda I)x = 0$$

$$(A - 7I)x = 0$$

$$\begin{bmatrix} -5 & 5 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Totalmatrisen blir:

$$\left[\begin{array}{cc|c} -5 & 5 & 0 \\ 3 & -3 & 0 \end{array} \right] \cdot \left(-\frac{1}{5} \right) = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 3 & -3 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{(-3)} = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Likningssystemet reduseres til en likning:

$$x_1 - x_2 = 0 \rightarrow x_1 = x_2$$

Vi velger fri variabel $x_2 = \alpha$ og får løsningen på vektorform lik:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \alpha = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \alpha \neq 0$$

Gjør det samme for $\lambda = -1$ og får totalmatrisen:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & 5 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{(-1)} = \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad \begin{array}{l} 3x_1 + 5x_2 = 0 \rightarrow 5x_2 = -3x_1 \\ \text{velger } x_1 = \beta \text{ som fri variabel} \\ \text{og får:} \end{array}$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta \\ -\frac{3}{5}\beta \end{bmatrix} = \beta \begin{bmatrix} 1 \\ -3/5 \end{bmatrix} \quad \beta \neq 0$$

Oppgave 6 b

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$$

Finne egenverdiene ved å løse $\det(A - \lambda I) = 0$

$$\begin{aligned} \det \begin{bmatrix} -4-\lambda & 3 \\ 0 & -4-\lambda \end{bmatrix} &= (-4-\lambda)(-4-\lambda) - 0 \\ &= 16 + 4\lambda + 4\lambda + \lambda^2 \\ &= \lambda^2 + 8\lambda + 16 = 0 \end{aligned}$$

$$\lambda = \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 4 \cdot 16}}{2}$$

Egenvektorsettet for $\lambda = -4$
er gitt ved:

$$\lambda = \frac{-8 \pm 0}{2}$$

$$(A - \lambda I)x = 0$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{-8}{2} = -4$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Totalmatrisen blir:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \cdot \left(\frac{1}{3} \right) = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Vi står igjen med likning: $x_2 = 0$

x_1 er en fri variabel som velges lik d . Løsningen på vektorform er gitt ved:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d \\ 0 \end{bmatrix} = d \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad d \neq 0$$

(oppgave 7 Kap 11.3)

En by A mister årlig 10% til nabokommunene, mens nabokommunene mister 15% til byen

a) Sannsynlighetsteoretisk matrise er gitt ved :

$$\begin{array}{c} \text{FRA:} \\ \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \text{A} & \text{B} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{A} \\ \text{B} \end{array} & \begin{array}{cc} \text{TIL} \\ \begin{bmatrix} 0,9 & 0,15 \\ 0,1 & 0,85 \end{bmatrix} \end{array} \end{array} \end{array}$$

b) Vi finner først egenverdiene ved å løse :

$$\det(P - \lambda I) = 0$$

$$\begin{aligned} \det \begin{bmatrix} 0,9 - \lambda & 0,15 \\ 0,1 & 0,85 - \lambda \end{bmatrix} &= (0,9 - \lambda)(0,85 - \lambda) - 0,1 \cdot 0,15 \\ &= 0,765 - 0,9\lambda - 0,85\lambda + \lambda^2 - 0,015 \\ &= \lambda^2 - 1,75\lambda + 0,75 = 0 \end{aligned}$$

$$\lambda = \frac{1,75 \pm \sqrt{1,75^2 - 4 \cdot 0,75}}{2}$$

$$\lambda = \frac{1,75 \pm \frac{1}{4}}{2}$$

Egenvektorsettet for $\lambda = 1$:

$$(P - 1I)x = 0$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} -0,1 & 0,15 & 0 \\ 0,1 & -0,15 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\text{①}} =$$

$$= \frac{7/4 \pm 1/4}{2}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} -0,1 & 0,15 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \cdot (-10) = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \lambda_1 = \frac{8/4}{2} = \frac{2}{2} = \underline{\underline{1}}$$

$x_2 = \alpha$ er en fri variabel og vi får

$$\text{at } x_1 = \frac{3}{2} x_2 = \frac{3}{2} \alpha$$

$$\lambda_2 = \frac{6/4}{2} = \frac{3/2}{2} = \underline{\underline{\frac{3}{4}}}$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/2 \alpha \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\alpha \\ 2\alpha \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \alpha \neq 0$$

$$\alpha = 1 \text{ gir } \underline{\underline{X = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}}}$$

Egenvektorsettet for $\lambda = \frac{3}{4} = 0,75$

$$(P - 0,75I)x = 0$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 0,15 & 0,15 & 0 \\ 0,1 & 0,1 & 0 \end{array} \right] \cdot \left(\frac{1}{0,15} \right) = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0,1 & 0,1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\text{①}} =$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$x_2 = \beta$ er en fri variabel og vi har
at $x_1 + x_2 = 0 \iff x_1 = -x_2 = -\beta$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\beta \\ \beta \end{bmatrix} = \beta \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \beta \neq 0$$

$$\beta = -1 \text{ gir: } \underline{\underline{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}}}$$

c) Vi er gitt at $x_0 = \begin{bmatrix} 0,8 \\ 0,2 \end{bmatrix}$ og at $x_{k+1} = P x_k$

Opprinnelig
hadde by A
80% av
befolkningen!

Vi skal finne ut hvor stor andel som bor i byen etter 2 år.
Velger en trinnvis fremstilling der egenverdier og
egenvektorer benyttes.

Trinn 1: Vi har i oppgave b, funnet egenverdiene og
tilhørende egenvektorer.

$$\lambda_1 = 1 \quad v_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \lambda_2 = \frac{3}{4} \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Trinn 2: Siden v_1 og v_2 er lineært uavh. så danner de
en basis for $\mathbb{R}^2$

Vektoren x_0 (som er uttrykt mhp standardbasisen)
kan derfor uttrykkes ved v_1 og v_2 .

Vi benytter oss av basis-skifte og lar U være
koordinat-skiftematriksen fra basis $B_1 = \{v_1, v_2\}$
til basis S .

U er gitt ved:
$$U = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Videre har vi at

$$x_{B_1} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = U^{-1} x_0 = \begin{bmatrix} 0,2 & 0,2 \\ 0,4 & -0,6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,8 \\ 0,2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,2 \\ 0,2 \end{bmatrix}$$

$$\text{der } U^{-1} = \frac{1}{3 \cdot (-1) - 1 \cdot 2} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = -\frac{1}{5} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,2 & 0,2 \\ 0,4 & -0,6 \end{bmatrix}$$

Trinn 3: Siden v_1 og v_2 er egenvektorer til P har vi
at:

$$P v_1 = \lambda_1 v_1 = v_1 \quad P v_2 = \lambda_2 v_2 = \frac{3}{4} v_2$$

Fra trinn 2 har vi at $x_0 = 0,2 v_1 + 0,2 v_2$

Vi får at:

$$x_1 = P x_0$$

$$= P(0,2 v_1 + 0,2 v_2)$$

$$= 0,2 P v_1 + 0,2 P v_2$$

$$= 0,2 v_1 + 0,2 \left(\frac{3}{4}\right) v_2$$

$$x_2 = P x_1$$

$$= 0,2 v_1 + 0,2 \left(\frac{3}{4}\right)^2 v_2$$

$$X_2 = \begin{bmatrix} X_{21} \\ X_{22} \end{bmatrix} = 0,2 \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} + 0,2 \left(\frac{3}{4}\right)^2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0,7125 \\ 0,2875 \end{bmatrix}$$

c: andelen som bor i byen etter 2 år er 71,25%

d) Andelen i by A over tid finner vi ved å bruke at:

$$X_k = 0,2 \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} + 0,2 \left(\frac{3}{4}\right)^k \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

og å la $k \rightarrow \infty$

Når $k \rightarrow \infty$ går $\left(\frac{3}{4}\right)^k \rightarrow 0$, noe som betyr at

$$X_k \rightarrow 0,2 \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,6 \\ 0,4 \end{bmatrix}$$

c: Andelen som bor i byen over tid er 60%

Sammenlign med oppgave 2 i kap 10.5

Ser du at likevektsvektoren er en egenvektor til P for egenverdien $\lambda_1 = 1$, dvs $0,2 v_1 = \begin{bmatrix} 0,6 \\ 0,2 \end{bmatrix}$.