

Matematikk 1

Andre deleksamen

20. mai 2019

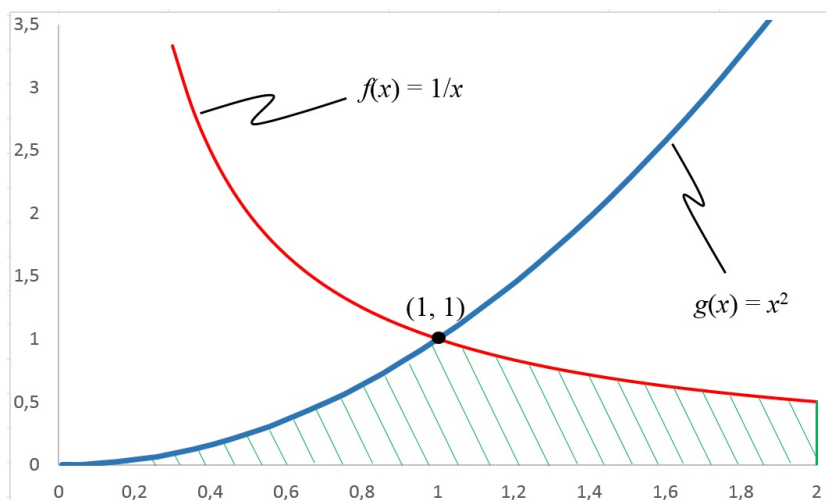
Løsningsforslag

Christian F. Heide

October 16, 2019

OPPGAVE 1 (10 %)

Grafene til funksjonene $f(x) = \frac{1}{x}$ og $g(x) = x^2$ er vist i figuren nedenfor. Grafene skjærer hverandre i punktet $(1, 1)$.



Finn arealet av området mellom $x = 0$ og $x = 2$ som i underkant er begrenset av x -aksen og øverst begrenset av den til enhver tid nederste av grafene, altså arealet av det skraverte området.

Areal under grafer finner vi ved å integrere funksjonen. Her er arealet mellom $x = 0$ og $x = 1$ arealet under grafen til $g(x)$, mens arealet mellom $x = 1$ og $x = 2$ er arealet under grafen til $f(x)$. Det totale arealet er følgelig gitt ved

$$A = \int_0^1 g(x) dx + \int_1^2 f(x) dx = \int_0^1 x^2 dx + \int_1^2 \frac{1}{x} dx =$$

$$\frac{1}{3} [x^3]_0^1 + [\ln |x|]_1^2 =$$

$$\frac{1}{3} (1^3 - 0^3) + \ln 2 - \ln 1 =$$

$$\underline{\underline{\frac{1}{3} + \ln 2 \approx 1.03}}$$

OPPGAVE 2 (15 %)

Gitt følgende ligningssystem:

$$2x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 8x_4 = 0$$

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0$$

$$3x_1 + 6x_2 + 8x_3 + 10x_4 = 0$$

a) Skriv opp koeffisientmatrisen til ligningssystemet. Løs så ligningssystemet ved å bringe koeffisientmatrisen på redusert trappeform. Skriv løsningen på vektorform.

Koeffisientmatrisen er:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 6 & 8 & 10 \end{bmatrix}$$

Vi løser ligningssystemet ved å gjøre rekkeoperasjoner på koeffisientmatrisen.

Vi subtraherer rekke 2 fra rekke 1:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 6 & 8 & 10 \end{bmatrix}$$

Vi subtraherer så rekke 1 fra rekke 2:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \\ 3 & 6 & 8 & 10 \end{bmatrix}$$

Vi subtraherer 3 ganger rekke 1 fra rekke 3:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & -8 \end{bmatrix}$$

Vi multipliserer rekke 2 med $-\frac{1}{2}$, og får

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & -8 \end{bmatrix}$$

Vi adderer 4 ganger rekke 2 til rekke 3:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Til slutt subtraherer vi 4 ganger rekke 2 fra rekke 1:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matrisen er nå på redusert trappeform.

Vi ser at vi har to ledende 1-ere, og siden vi i alt har fire variable har vi $4 - 2 = 2$ frie variable.

Vi setter

$$x_4 = s$$

hvor $s \in \mathbb{R}$, altså et vilkårlig reelt tall, og får fra rekke 2

$$x_3 + 2x_4 = 0$$

som gir

$$x_3 = -2x_4 = -2s$$

Videre setter vi

$$x_2 = t$$

hvor $t \in \mathbb{R}$, og får fra rekke 1

$$x_1 + 2x_2 - 2x_4 = 0$$

som gir

$$x_1 = -2x_2 + 2x_4 = -2t + 2s$$

På vektorform blir løsningen da

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -2t + 2s \\ t \\ -2s \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2t \\ t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2s \\ 0 \\ -2s \\ s \end{bmatrix} =$$

$$t \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

b) Vi kaller koeffisientmatrisen til dette ligningssystemet A .

Finn en basis for kolonnerommet til A og en basis for nullrommet til A .

Vi ser at i den reduserte trappeformen til A , er det kolonne 1 og 3 som har ledende 1-ere.

Kolonne 1 og 3 i matrise A vil derfor danne en basis for kolonnerommet:

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 8 \end{bmatrix}$$

eller, dersom vi ønsker kan vi forkorte den andre vektoren med en faktor 2 så vi får

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

En basis for nullrommet har vi direkte fra løsningen av ligningssystemet:

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

c) Angi rangen og nulliteten til A .

Rangen til A er det samme som dimensjonen til kolonnerommet. Siden vi har to basisvektorer, vil dimensjonen til kolonnerommet være

$$\text{rank } A = 2.$$

Nulliteten er det samme som dimensjonen til nullrommet. Nullrommet har to basisvektorer.

$$\text{Følgelig er nulliteten til } A \text{ lik } 2.$$

OPPGAVE 3 (15 %)

Bruk laplacetransformasjonen til å løse følgende initialverdiproblem:

$$y'' - y' - 6y = 4\delta(t) \quad y(0) = 2, y'(0) = -3$$

Vi laplacetransformerer ligningen. Den transformerte av $\delta(t)$ er lik 1, og vi får følgende

$$s^2 Y - s \cdot 2 - (-3) - (sY - 2) - 6Y = 4$$

Så løser vi med hensyn på Y :

$$s^2 Y - 2s + 3 - sY + 2 - 6Y = 4$$

og

$$s^2 Y - sY - 6Y = 2s + 4 - 3 - 2$$

$$(s^2 - s - 6)Y = 2s - 1$$

$$Y(s) = \frac{2s - 1}{s^2 - s - 6}$$

For å finne $y(t)$ må vi inverstransformere. Dersom nevneren har reelle røtter, kan vi delbrøkoppspalte uttrykket. Vi sjekker dette:

$$s^2 - s - 6 = 0$$

som har løsninger

$$s = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2}$$

Nevneren har følgende røttene

$$s = \frac{1 + 5}{2} = \frac{6}{2} = 3 \quad \vee \quad s = \frac{1 - 5}{2} = \frac{-4}{2} = -2$$

Vi kan derfor faktorisere nevneren slik:

$$s^2 - s - 6 = (s - 3)(s + 2)$$

Vi kan da delbrøkoppspalte:

$$\frac{2s - 1}{s^2 - s - 6} = \frac{A}{s - 3} + \frac{B}{s + 2}$$

Vi ganger begge sider med $(s-3)(s+2)$, og får

$$\frac{2s-1}{s^2-s-6}(s-3)(s+2) = \frac{A}{s-3}(s-3)(s+2) + \frac{B}{s+2}(s-3)(s+2)$$

Vi forkorter og får

$$2s-1 = A(s+2) + B(s-3)$$

$s = 3$ gir

$$2 \cdot 3 - 1 = A(3+2) + B(3-3)$$

$$5 = 5A$$

$$\underline{A = 1}$$

$s = -2$ gir

$$2 \cdot (-2) - 1 = A(-2+2) + B(-2-3)$$

$$-5 = -5B$$

$$\underline{B = 1}$$

Vi kan følgelig skrive

$$Y(s) = \frac{2s-1}{s^2-s-6} = \frac{1}{s-3} + \frac{1}{s+2}$$

Vi foretar så en inverstransformasjon:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}(Y(s)) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-3}\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+2}\right) =$$

$$\underline{\underline{e^{3t} + e^{-2t}}}$$

OPPGAVE 4 (15 %)

Gitt følgende målinger:

x	1	2	3
y	-1	1	7

Benytt minste kvadraters metode til å finne den rette linjen som best passer til disse målingene.

Tips: Minste kvadraters metode er generelt sett beskrevet av ligningssystemet

$$A^T A \mathbf{x} = A^T \mathbf{y}$$

hvor A er bygd opp av målingenes x -verdier på følgende måte

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^m \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^m \end{bmatrix}$$

mens $\mathbf{y}$ består av målingenes y -verdier

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

$\mathbf{x}$ er vektoren av koeffisientene som inngår i polynomet $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_mx^m$, altså

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}$$

I vårt tilfelle er da

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix}$$

og

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix}$$

Vi finner

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 14 \end{bmatrix}$$

og

$$A^T \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 22 \end{bmatrix}$$

Ligningssystemet vi skal løse, er følgelig

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 14 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 22 \end{bmatrix}$$

Siden dette er et 2 x 2-system løser vi det lettest ved å invertere koeffisientmatrisen:

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 14 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{3 \cdot 14 - 6 \cdot 6} \cdot \begin{bmatrix} 14 & -6 \\ -6 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \cdot \begin{bmatrix} 14 & -6 \\ -6 & 3 \end{bmatrix}$$

og vi får da

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \cdot \begin{bmatrix} 14 & -6 \\ -6 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 \\ 22 \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \cdot \begin{bmatrix} 14 \cdot 7 + (-6) \cdot 22 \\ (-6) \cdot 7 + 3 \cdot 22 \end{bmatrix} =$$
$$\frac{1}{6} \cdot \begin{bmatrix} -34 \\ 24 \end{bmatrix}$$

Vi får følgelig $a_0 = -\frac{34}{6} = -\frac{17}{3} \approx -5.67$ og $a_1 = \frac{24}{6} = 4$.

Den rette linjen som er best tilpasset målingene, er altså

$$\underline{\underline{y = -\frac{17}{3} + 4x = -5.67 + 4x}}$$

OPPGAVE 5 (10 %)

Gitt følgende differensialligning:

$$y' - (\sin x) \cdot y = \sin x$$

a) Finn den generelle løsningen av ligningen.

Denne ligningen kan løses både ved å bruke integrerende faktor og ved separering. Jeg viser først metoden med integrerende faktor.

Her er ligningen på standard form, så vi trenger ikke å omforme den. For å løse ligningen kan vi benytte teknikken med å multiplisere med integrerende faktor.

Vi integrerer faktoren foran y :

$$\int (-\sin x) dx = \cos x$$

Denne skal så eksponentieres:

$$e^{\cos x}$$

Så ganger vi ligningen med denne, og får

$$e^{\cos x} y' - e^{\cos x} \sin x \cdot y = e^{\cos x} \sin x$$

Venstre side av ligningen kan nå skrives $(e^{\cos x} y)'$ slik at ligningen blir

$$(e^{\cos x} y)' = e^{\cos x} \sin x$$

Vi integrerer begge sider, og får

$$\int (e^{\cos x} y)' dx = \int e^{\cos x} \sin x dx$$

Venstre side blir (siden derivasjon og integrasjon på venstre side opphever hverandre)

$$e^{\cos x} y$$

Høyre side kan vi integrere ved å bruke substitusjonen

$$u = \cos x$$

Denne gir

$$\frac{du}{dx} = -\sin x$$

og følgelig

$$dx = -\frac{1}{\sin x} du$$

Benytter vi denne substitusjonen, får vi for høyre side av ligningen

$$\begin{aligned} \int e^{\cos x} \sin x dx &= \int e^u \sin x \cdot \left(-\frac{1}{\sin x}\right) du = \\ &= -\int e^u du = -e^u + C = \\ &= -e^{\cos x} + C \end{aligned}$$

Etter integrasjon blir derfor ligningen

$$e^{\cos x} y = -e^{\cos x} + C$$

For å løse med hensyn på y multipliserer vi begge sider med $e^{-\cos x}$, og får, siden $e^{-\cos x} e^{\cos x} = e^0 = 1$,

$$e^{-\cos x} e^{\cos x} y = -e^{\cos x} e^{-\cos x} + C e^{-\cos x}$$
$$\underline{\underline{y = C e^{-\cos x} - 1}}$$

Vi kunne alternativt benyttet separering:

$$y' - (\sin x) \cdot y = \sin x$$

$$y' = \sin x \cdot y + \sin x$$

$$y' = \sin x (y + 1)$$

$$\frac{1}{y+1} y' = \sin x$$

Integrerer begge sider:

$$\int \frac{1}{y+1} \frac{dy}{dx} dx = \int \sin x dx$$

$$\int \frac{1}{y+1} dy = \int \sin x dx$$

$$\ln|y+1| = -\cos x + C_1$$

$$e^{\ln|y+1|} = e^{-\cos x + C_1}$$

$$|y+1| = C_2 e^{-\cos x}$$

$$y+1 = C e^{-\cos x}$$

$$\underline{\underline{y = C e^{-\cos x} - 1}}$$

b) Finn løsningen av ligningen når du kjenner grensebetingelsen $y(\frac{\pi}{2}) = 4$.

Vi setter inn grensebetingelsen, og får:

$$C e^{-\cos \frac{\pi}{2}} - 1 = 4$$

Siden $\cos \frac{\pi}{2} = 0$, blir dette

$$C e^0 - 1 = 4$$

og

$$C - 1 = 4$$

$$C = 4 + 1 = 5$$

Løsningen er følgelig

$$\underline{\underline{y = 5e^{-\cos x} - 1}}$$

OPPGAVE 6 (10 %)

En lineærtransformasjon er definert ved følgende matrise:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -6 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Finn lineærtransformasjonens egenverdier og tilhørende egenvektorsett.

Vi må først finne egenverdiene. Egenverdiene er de tall λ som gjør determinanten til matrisen $A - \lambda I$ lik null:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & -6 \\ -1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)(2 - \lambda) - (-6) \cdot (-1) =$$

$$2 - \lambda - 2\lambda + \lambda^2 - 6 = \lambda^2 - 3\lambda - 4$$

$$\lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0$$

$$\lambda = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 16}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2}$$

Vi får altså følgende egenverdier:

$$\lambda_1 = \frac{3+5}{2} = \frac{8}{2} = \underline{4}$$

$$\lambda_2 = \frac{3-5}{2} = \frac{-2}{2} = \underline{\underline{-1}}$$

Vi kan så finne egenvektorsettene som er knyttet til disse egenverdiene. Disse finner vi ved å løse ligningssystemene

$$(A - \lambda_1 I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

og

$$(A - \lambda_2 I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

Egenvektorsett sammenhørende med $\lambda_1 = 4$:

$$A - 4I = \begin{bmatrix} 1-4 & -6 \\ -1 & 2-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -6 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

Ligningssystemet vi skal løse for å finne egenvektorsettet, er følgende:

$$\begin{bmatrix} -3 & -6 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

Vi bringer koeffisientmatrisen på redusert trappeform. Bytter rekke 1 og 2:

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -6 \end{bmatrix}$$

Multipliserer rekke 1 med -1 :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -6 \end{bmatrix}$$

Adderer 3 ganger rekke 1 til rekke 3:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Koeffisientmatrisen er nå på redusert trappeform. Vi har én fri variabel, og setter

$$x_2 = s$$

Rekke 1 gir da

$$x_1 + 2x_2 = 0$$

som gir

$$x_1 = -2x_2 = -2s$$

Egenvektorsettet blir derfor

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -2s \\ s \end{bmatrix} = s \underline{\underline{\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}}}, \quad s \neq 0$$

Egenvektorsett sammenhørende med $\lambda_2 = -1$:

$$A - 4I = \begin{bmatrix} 1 - (-1) & -6 \\ -1 & 2 - (-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Vi adderer rekke 2 til rekke 1, og får

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Så adderer vi rekke 1 til rekke 2 og får

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vi setter $x_2 = t$. Rekke 1 gir da

$$x_1 - 3x_2 = 0$$

og altså

$$x_1 = 3x_2 = 3t$$

Egenvektorsett sammenhørende med $\lambda_2 = -1$ er følgelig

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3t \\ t \end{bmatrix} = t \underline{\underline{\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}}}, \quad t \neq 0$$

OPPGAVE 7 (15 %)

En stund før klokka 12 blir en død kropp funnet, og politiet mistenker at vedkommende ikke har dødd en naturlig død. Politiet kontakter deg for at du skal bistå dem med å finne dødstidspunktet.

Du ankommer åstedet og måler den døde kroppens temperatur til 26.5 °C. Klokka er da 12.00. Du måler på nytt klokka 13.00, og temperaturen er da sunket til 23.9 °C.

Kroppen har ligget i et rom som du kan anta har hatt konstant temperatur på 21 °C. Du kan også anta at kroppen hadde en temperatur på 37 °C ved dødstidspunktet, og at avkjølingen som har skjedd følger Newtons avkjølingslov:

Endringen i kroppens temperatur er proporsjonal med temperaturdifferansen mellom kroppens temperatur og omgivelsene.

Matematisk kan dette uttrykkes

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - L)$$

Finn dødstidspunktet basert på ovenstående fakta og antagelser.

Her er altså T kroppens temperatur, og L er omgivelsenes temperatur. L er konstant lik 21 °C, mens T endrer seg med tiden.

Vi kan først finne den generelle løsningen av ligningen, for eksempel ved å separere. Vi deler på begge sider med $T - L$, og får:

$$\frac{1}{T - L} \cdot \frac{dT}{dt} = -k$$

Integrerer vi begge sider med hensyn på t får vi

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{T - L} \cdot \frac{dT}{dt} dt &= \int (-k) dt \\ \int \frac{1}{T - L} dT &= -k \int dt \end{aligned}$$

Vi gjennomfører integrasjonen og får

$$\ln|T - L| = -kt + C_1$$

Vi eksponentierer begge sider:

$$e^{\ln|T-L|} = e^{-kt+C_1}$$

som gir

$$|T - L| = e^{-kt} \cdot e^{C_1}$$

$$|T - L| = C_2 e^{-kt}$$

$$T - L = C e^{-kt}$$

og

$$T(t) = L + C e^{-kt} = 21 + C e^{-kt}$$

Vi kan bestemme C ved å benytte at kroppens temperatur klokka 12 var 26.5°C . For å kunne gjøre dette må vi definere et passende tidspunkt som $t = 0$. Et naturlig valg er å si at $t = 0$ når klokka er 12.00. Dette valget må vi holde fast på i resten av beregningen. Vi får da

$$T(0) = 26.5$$

$$21 + C e^{-k \cdot 0} = 26.5$$

$$C e^0 = 26.5 - 21$$

$$C = \underline{5.5}$$

Løsningen er da

$$T(t) = 21 + 5.5 e^{-kt}$$

Vi kan så benytte temperaturmålingen klokka 13 for å bestemme k . Vi må velge hvilken enhet vi skal måle tiden i siden vi vil få ulike k avhengig av dette. Jeg velger minutter.

Klokka 13.00 vil da være $t = 60$ (siden vi valgte $t = 0$ til å være klokka 12.00). Vi får da

$$T(60) = 23.9$$

$$21 + 5.5 e^{-k \cdot 60} = 23.9$$

$$5.5 e^{-60k} = 23.9 - 21$$

$$e^{-60k} = \frac{2.9}{5.5}$$

Vi tar logaritmen på begge sider:

$$\ln e^{-60k} = \ln \frac{2.9}{5.5}$$

$$-60k = \ln \frac{2.9}{5.5}$$

$$k = -\frac{1}{60} \ln \frac{2.9}{5.5} \approx 0.0107$$

Temperaturen i kroppen vil følgelig utvikle seg på følgende måte, med klokka 12.00 som $t = 0$:

$$\underline{T(t) = 21 + 5.5 e^{-0.0107t}}$$

For å finne dødstidspunktet må vi se ved hvilket tidspunkt temperaturen var $T = 37\text{ °C}$:

$$21 + 5.5e^{-0.0107t} = 37$$

$$5.5e^{-0.0107t} = 37 - 21$$

$$e^{-0.0107t} = \frac{16}{5.5}$$

$$\ln e^{-0.0107t} = \ln \frac{16}{5.5}$$

$$-0.0107t = \ln \frac{16}{5.5}$$

$$t = -\frac{1}{0.0107} \ln \frac{16}{5.5} = -100.1$$

Dette betyr at dødstidspunktet var ca. 100 minutter før klokka 12.00, altså

klokka 10.20