

Matematikk 1

Andre deleksamen

24. mai 2018

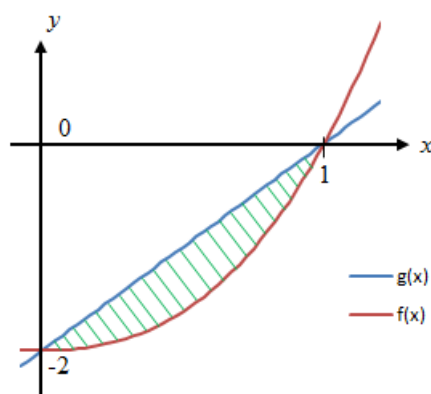
Løsningsforslag

Christian F. Heide

May 28, 2018

OPPGAVE 1 (10 %)

Grafene til funksjonene $f(x) = x^3 + x^2 - 2$ og $g(x) = 2x - 2$ er vist i figuren nedenfor. Grafene skjærer hverandre i punktene $(0, -2)$ og $(1, 0)$.



Finn arealet mellom grafene i figuren, altså arealet av det skraverte området.

Dette arealet finner vi ved følgende integral:

$$A = \int_0^1 (g(x) - f(x)) dx = \int_0^1 (2x - 2 - (x^3 + x^2 - 2)) dx =$$

$$\int_0^1 (2x - 2 - x^3 - x^2 + 2) dx = \int_0^1 (-x^3 - x^2 + 2x) dx =$$

$$\left[-\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + x^2 \right]_0^1 = -\frac{1}{4} \cdot 1^4 - \frac{1}{3} \cdot 1^3 + 1^2 - 0 =$$

$$-\frac{1}{4} - \frac{1}{3} + 1 = -\frac{3}{12} - \frac{4}{12} + \frac{12}{12} =$$

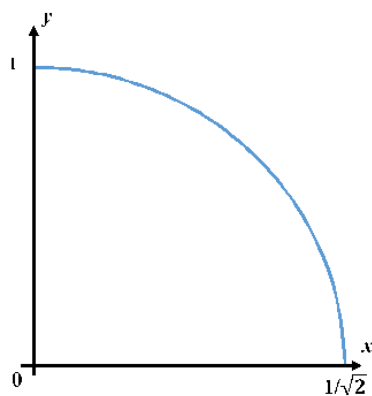
$$\underline{\underline{\frac{5}{12}}}$$

OPPGAVE 2 (10 %)

Grafen til funksjonen

$$f(x) = \sqrt{1 - 2x^2}$$

mellom $x = 0$ og $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$, er vist i figuren nedenfor.



Denne grafen roteres om y-aksen.

Finn volumet av det omdreiningslegemet som da fremkommer.

Volumet av et legeme som fremkommer ved å rotere en graf om y -aksen, er gitt ved

$$V = \int_a^b 2\pi x h \, dx$$

hvor h er høyden til omdreiningslegemet, som altså varierer med x . I dette tilfellet er $h = f(x)$. Videre er $a = 0$ og $b = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Vi får derfor

$$V = \int_0^{1/\sqrt{2}} 2\pi x f(x) \, dx = 2\pi \int_0^{1/\sqrt{2}} x \sqrt{1-2x^2} \, dx$$

Integralet kan løses ved hjelp av substitusjonen

$$u = 1 - 2x^2$$

som gir

$$\frac{du}{dx} = -4x$$

og altså

$$dx = -\frac{1}{4x} \, du$$

Integralet blir da

$$V = 2\pi \int_{x=0}^{x=1/\sqrt{2}} x \sqrt{u} \left(-\frac{1}{4x}\right) \, du$$

Her kan vi forkorte x -ene mot hverandre, og får

$$V = -\frac{\pi}{2} \int_{x=0}^{x=1/\sqrt{2}} \sqrt{u} \, du$$

Vi konverterer også integrasjonsgrensene fra x til den nye integrasjonsvariablen u :

$$x = 0 \text{ gir } u = \sqrt{1-2 \cdot 0^2} = \sqrt{1-0} = 1$$

og

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ gir } u = \sqrt{1-2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{1-2 \cdot \frac{1}{2}} = \sqrt{1-1} = \sqrt{0} = 0$$

Integralet blir da

$$V = -\frac{\pi}{2} \int_1^0 \sqrt{u} \, du = -\frac{\pi}{2} \int_1^0 u^{\frac{1}{2}} \, du$$

Vi kan så, hvis vi vil, fjerne minuset foran integralet ved å bytte om på integrasjonsgrensene, og kan fullføre beregningen:

$$V = -\frac{\pi}{2} \int_1^0 u^{\frac{1}{2}} \, du = \frac{\pi}{2} \int_0^1 u^{\frac{1}{2}} \, du =$$

$$\frac{\pi}{2} \cdot \frac{2}{3} \left[u^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 =$$

$$\frac{\pi}{3} \left(1^{\frac{3}{2}} - 0^{\frac{3}{2}} \right) =$$

$$\underline{\underline{\frac{\pi}{3}}}$$

OPPGAVE 3 (15 %)

Gitt følgende ligningssystem:

$$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 + x_3 &= 1 \\ -2x_1 + x_2 + 2x_3 &= 2 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 &= 3 \end{aligned}$$

a) Dette ligningssystemet kan skrives på matriseform, altså som $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Angi hva A , $\mathbf{x}$ og $\mathbf{b}$ er i dette tilfelle.

A , $\mathbf{x}$ og $\mathbf{b}$ er her:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

b) Finn determinanten til A , og forklar hva den forteller om hvor mange løsninger ligningssystemet har.

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \\ &= 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - (-2) \cdot \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = \\ &= 3 \cdot (1 \cdot 2 - 2 \cdot (-1)) + 2 \cdot ((-2) \cdot 2 - 2 \cdot 1) + ((-2) \cdot (-1) - 1 \cdot 1) = \\ &= 3 \cdot 4 + 2 \cdot (-6) + 1 = \\ &= \underline{1} \end{aligned}$$

Siden determinanten er forskjellig fra 0, vet vi at ligningssystemet har nøyaktig én løsning.

c) Finn den inverse matrisen, A^{-1} .

For å finne den inverse matrisen, danner vi matrisen $[A|I]$ og gjør rekkeoperasjoner på den slik at venstre halvdel blir I . Da vil høyre halvdel ha blitt A^{-1} :

$$[A|I] = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Vi starter med å addere rekke 2 til rekke 1, og får

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Vi tar to ganger rekke 1 og adderer dette til rekke 2:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 8 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Så tar vi rekke 3 og trekker fra rekke 1:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 8 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Vi bytter fortegn på både rekke 2 og 3 (ved å gange rekkene med -1):

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -8 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Vi tar rekke 2 og legger til 8 ganger rekke 3:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & 5 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Så tar vi rekke 1 og trekker fra 3 ganger rekke 3:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -2 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & 5 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Til slutt tar vi rekke 1 og legger til rekke 2:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & 5 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Nå er venstre halvdel blitt identitetsmatrisen, og høyre halvdel er da A^{-1} , dvs

$$A^{-1} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 4 & 3 & -5 \\ 6 & 5 & -8 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}}}$$

d) Finn løsningen av ligningssystemet ved å beregne $A^{-1}\mathbf{b}$.

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b} =$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & -5 \\ 6 & 5 & -8 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 4 \cdot 1 + 3 \cdot 2 - 5 \cdot 3 \\ 6 \cdot 1 + 5 \cdot 2 - 8 \cdot 3 \\ 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 - 1 \cdot 3 \end{bmatrix} =$$

$$\underline{\underline{\begin{bmatrix} -5 \\ -8 \\ 0 \end{bmatrix}}}$$

Dvs.

$$\underline{\underline{x_1 = -5, \quad x_2 = -8, \quad x_3 = 0}}$$

OPPGAVE 4 (10 %)

Gitt følgende matriser:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Finn følgende matriseprodukter dersom de eksisterer:

a) AB

$$\begin{aligned} AB &= \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + (-3) \cdot 2 + 0 \cdot (-1) + (-1) \cdot 0 & 1 \cdot 2 + (-3) \cdot (-1) + 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 \\ 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 + 1 \cdot (-1) + (-3) \cdot 0 & 2 \cdot 2 + (-1) \cdot (-1) + 1 \cdot 1 + (-3) \cdot 1 \end{bmatrix} = \\ &= \underline{\underline{\begin{bmatrix} -5 & 4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}}} \end{aligned}$$

b) BA

$$\begin{aligned} BA &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & -3 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 & 1 \cdot (-3) + 2 \cdot (-1) & 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 & 1 \cdot (-1) + 2 \cdot (-3) \\ 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 & 2 \cdot (-3) + (-1) \cdot (-1) & 2 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 & 2 \cdot (-1) + (-1) \cdot (-3) \\ (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 2 & (-1) \cdot (-3) + 1 \cdot (-1) & (-1) \cdot 0 + 1 \cdot 1 & (-1) \cdot (-1) + 1 \cdot (-3) \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 & 0 \cdot (-3) + 1 \cdot (-1) & 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 & 0 \cdot (-1) + 1 \cdot (-3) \end{bmatrix} = \\ &= \underline{\underline{\begin{bmatrix} 5 & -5 & 2 & -7 \\ 0 & -5 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & -3 \end{bmatrix}}} \end{aligned}$$

c) $A^T A$

Her må vi først finne den transponerte til matrise A :

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -1 \\ 0 & 1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$$

Vi finner da

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -1 \\ 0 & 1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & -3 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 & 1 \cdot (-3) + 2 \cdot (-1) & 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 & 1 \cdot (-1) + 2 \cdot (-3) \\ (-3) \cdot 1 + (-1) \cdot 2 & (-3) \cdot (-3) + (-1) \cdot (-1) & (-3) \cdot 0 + (-1) \cdot 1 & (-3) \cdot (-1) + (-1) \cdot (-3) \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 & 0 \cdot (-3) + 1 \cdot (-1) & 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 & 0 \cdot (-1) + 1 \cdot (-3) \\ (-1) \cdot 1 + (-3) \cdot 2 & (-1) \cdot (-3) + (-3) \cdot (-1) & (-1) \cdot 0 + (-3) \cdot 1 & (-1) \cdot (-1) + (-3) \cdot (-3) \end{bmatrix} =$$
$$\begin{bmatrix} 5 & -5 & 2 & -7 \\ -5 & 10 & -1 & 6 \\ 2 & -1 & 1 & -3 \\ -7 & 6 & -3 & 10 \end{bmatrix}$$

OPPGAVE 5 (25 %)

Gitt følgende matrise:

$$A = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 \end{bmatrix}$$

a) Finn egenverdiene og de tilhørende egenvektorsettene til A .

Vi må først finne egenverdiene. Dette er de λ som gjør determinanten $\det(A - \lambda I)$ lik null.

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 0.8 - \lambda & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 - \lambda \end{vmatrix} = \\ &= (0.8 - \lambda)(0.7 - \lambda) - (0.3 \cdot 0.2) = \\ &= 0.56 - 0.8\lambda - 0.7\lambda + \lambda^2 - 0.06 = \\ &= \lambda^2 - 1.5\lambda + 0.5 \end{aligned}$$

Vi finner så hvilke λ som gjør dette uttrykket lik 0:

$$\lambda^2 - 1.5\lambda + 0.5 = 0$$

$$\lambda = \frac{-(-1.5) \pm \sqrt{(-1.5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0.5}}{2 \cdot 1} = \frac{1.5 \pm \sqrt{2.25 - 2}}{2} = \frac{1.5 \pm 0.5}{2}$$

og vi får altså følgende egenverdier:

$$\underline{\underline{\lambda_1}} = \frac{1.5 + 0.5}{2} = \underline{\underline{1}}$$

og

$$\underline{\underline{\lambda_2}} = \frac{1.5 - 0.5}{2} = \underline{\underline{0.5}}$$

Vi kan så finne egenvektorsettene tilhørende disse to egenverdiene. Et egenvektorsett er alle vektorer $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ som er løsning av ligningen $(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Egenvektorsett tilhørende $\lambda_1 = 1$:

$$A - \lambda_1 I = \begin{bmatrix} 0.8 - 1 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.2 & 0.3 \\ 0.2 & -0.3 \end{bmatrix}$$

Matrisen over er altså koeffisientmatrisen i ligningssystemet $(A - \lambda_1 I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Vi løser dette på vanlig måte, altså ved å gjøre rekkeoperasjoner på koeffisientmatrisen (siden dette er et homogent ligningssystem, trenger vi ikke å ta med høyre side). Vi adderer første rekke til andre rekke, og får

$$\begin{bmatrix} -0.2 & 0.3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Så kan vi for enkelhets skyld multiplisere første rekke med 10:

$$\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vi får her én fri variabel (siden vi har én ligning og to ukjente), og vi setter $x_2 = t$. Rekke 1 gir da:

$$-2x_1 + 3x_2 = 0$$

Vi ordner ligningen, og får

$$-2x_1 = -3x_2 = -3t$$

som gir

$$x_1 = \frac{-3}{-2}t = \frac{3}{2}t$$

Egenvektorsettet tilhørende $\lambda_1 = 1$ kan altså skrives

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2}t \\ t \end{bmatrix} = t \cdot \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad t \neq 0$$

eller, dersom vi ønsker å unngå brøker (siden t er vilkårlig, kan vi gange vektoren med 2):

$$\underline{\underline{\mathbf{x} = s \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}}}, \quad s \neq 0$$

Egenvektorsettet tilhørende $\lambda_2 = 0.5$:

$$A - \lambda_2 I = \begin{bmatrix} 0.8 - 0.5 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 - 0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.3 \\ 0.2 & 0.2 \end{bmatrix}$$

Vi multipliserer så første rekke med $\frac{10}{3}$ og andre rekke med 5, og får

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Så subtraherer vi første rekke fra andre rekke, og får

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vi får igjen en fri variabel (dersom vi ikke hadde fått en fri variabel, ville det vist oss at vi hadde gjort en regnefeil et sted), og vi setter $x_2 = t$. Rekke 1 gir da:

$$x_1 + x_2 = 0$$

Vi ordner ligningen, og får

$$x_1 = -x_2 = -t$$

Egenvektorsettet tilhørende $\lambda_2 = 0.5$, kan følgelig skrives

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -t \\ t \end{bmatrix} = t \cdot \underline{\underline{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}}}, \quad t \neq 0$$

På den svenske øya Syd-Koster driver et firma med sykkelutleie. Det er to steder hvor man kan leie sykler: Ekenäs og Långegärde. Syklene kan leies fra klokken 08.00 om morgenen og må leveres tilbake på ett av disse to stedene innen klokken 20.00 om kvelden.

Det viser seg at av de syklene som leies ved Ekenäs, returneres 80 % til Ekenäs og 20 % til Långegärde. Av syklene som leies ved Långegärde, returneres 30 % til Ekenäs og 70 % til

Långegärde. For enkelhets skyld antar vi at dette brukermønsteret ikke endrer seg over tid, at alle sykler blir utleid hver morgen og at ingen sykler blir ødelagt eller stjålet. Anta at det i utgangspunktet er like mange sykler ved Ekenäs som ved Långegärde.

Vi betegner andelen sykler ved Ekenäs ved starten e_0 og andelen sykler ved Långegärde ved starten l_0 . Andelen sykler på de to stedene etter ett døgn, kaller vi henholdsvis e_1 og l_1 .

b) Finn e_1 og l_1 uttrykt ved e_0 og l_0 .

Andelen sykler ved Ekenäs etter ett døgn, vil være 80 % av de syklene som var ved Ekenäs i utgangspunktet (siden 80 % av disse syklene leveres tilbake til Ekenäs), altså $0.8 \cdot e_0$, pluss 30 % av de syklene som var ved Långegärde i utgangspunktet (siden 30 % av disse syklene blir innlevert til Ekenäs), altså $0.3 \cdot l_0$. Vi får derfor:

$$\underline{e_1 = 0.8e_0 + 0.3l_0}$$

Tilsvarende resonnement gir for andelen sykler ved Långegärde etter ett døgn:

$$\underline{l_1 = 0.2e_0 + 0.7l_0}$$

Vi kan bruke betegnelsen $\mathbf{x}_0$ på vektoren $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} e_0 \\ l_0 \end{bmatrix}$.

Vektoren $\mathbf{x}_1$ er da andelen sykler på de to stedene etter ett døgn, altså $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} e_1 \\ l_1 \end{bmatrix}$.

Vi kan da skrive $\mathbf{x}_1 = A\mathbf{x}_0$, hvor A er matrisen gitt i spørsmål a).

c) Begrunn at $\mathbf{x}_n = A^n \mathbf{x}_0$. Forklar hvorfor det ville vært fordelaktig dersom $\mathbf{x}_0$ hadde vært en egenvektor til A .

Siden prosentandelen innleverte sykler til Ekenäs og Långegärde hele tiden er den samme, vil med samme resonnement som i spørsmål b), få

$$e_2 = 0.8e_1 + 0.3l_1$$

$$l_2 = 0.2e_1 + 0.7l_1$$

eller, skrevet på matriseform:

$$\mathbf{x}_2 = A\mathbf{x}_1$$

Og, siden $\mathbf{x}_1 = A\mathbf{x}_0$, får vi

$$\mathbf{x}_2 = A\mathbf{x}_1 = A(A\mathbf{x}_0) = A^2\mathbf{x}_0$$

På samme måte får vi

$$\mathbf{x}_3 = A\mathbf{x}_2 = AA^2\mathbf{x}_0 = A^3\mathbf{x}_0$$

og følgelig

$$\underline{\mathbf{x}_n = A^n \mathbf{x}_0}$$

Det ville vært fordelaktig om $\mathbf{x}_0$ hadde vært en egenvektor, fordi da ville $A\mathbf{x}_0$ vært lik $\lambda\mathbf{x}_0$, og følgelig

$$A^2\mathbf{x}_0 = A(A\mathbf{x}_0) = A(\lambda\mathbf{x}_0) = \lambda(A\mathbf{x}_0) = \lambda(\lambda\mathbf{x}_0) = \lambda^2\mathbf{x}_0$$

På samme måte ville vi da fått

$$A^n\mathbf{x}_0 = A^{n-1}A\mathbf{x}_0 = A^{n-1}(A\mathbf{x}_0) = A^{n-1}(\lambda\mathbf{x}_0) = \lambda A^{n-2}A\mathbf{x}_0 = \lambda A^{n-2}(\lambda\mathbf{x}_0) = \lambda^2 A^{n-2}\mathbf{x}_0$$

Hvis vi fortsetter dette, ser vi at vi får

$$A^n\mathbf{x}_0 = \lambda^n\mathbf{x}_0$$

Et viktig poeng her, er at det å beregne A^n er meget krevende, især hvis A er en stor matrise og n er stor, mens det å beregne λ^n er enkelt, nesten uansett hvor stor n er. Dette er grunnen til at det ville vært fordelaktig om $\mathbf{x}_0$ var en egenvektor.

Trikset vi gjør i resten av denne oppgaven, er at vi gjør et basisskifte til en basis basert på egenvektorer. Dette vil gjøre beregningen enklere, nettopp av grunnen vi har forklart over.

d) Vi skal nå foreta et basisskifte fra standardbasis til en basis gitt ved to av matrisens egenvektorer. Velg en egenvektor fra hvert av egenvektorsettene. Angi koordinatskiftematriksen U som du da får, og finn koordinatene til $\mathbf{x}_0$ i denne nye basisen.

Jeg velger følgende egenvektorer:

Egenvektor tilhørende egenverdien $\lambda_1 = 1$: $\chi_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$

Egenvektor tilhørende egenverdien $\lambda_2 = 0.5$: $\chi_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Koordinatskiftematriksen U er da matrisen som består av disse to egenvektorene som kolonner:

$$U = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Da er koordinatene c_1 og c_2 i denne nye basisen gitt ved sammenhengen

$$\mathbf{x}_0 = U\mathbf{c}$$

hvor $\mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$. Følgelig er koordinatene i den nye basisen

$$\mathbf{c} = U^{-1}\mathbf{x}_0$$

Vi må følgelig invertere U :

$$U^{-1} = \frac{1}{3 \cdot 1 - (-1) \cdot 2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

Ved starten er det like mange sykler ved de to stedene, og følgelig er

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

Vi får da

$$\begin{aligned} \mathbf{c} &= U^{-1} \mathbf{x}_0 = \frac{1}{5} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix} = \\ \frac{1}{5} \cdot \begin{bmatrix} 1 \cdot 0.5 + 1 \cdot 0.5 \\ (-2) \cdot 0.5 + 3 \cdot 0.5 \end{bmatrix} &= \frac{1}{5} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.1 \end{bmatrix}}} \end{aligned}$$

Merk at disse koordinatene er avhengig av hvilken basis som er valgt, altså hvilke egenvektorer vi valgte. Mitt svar er altså ikke det eneste korrekte svaret.

e) Bruk det du fant i spørsmål d) til å finne et uttrykk for e_n og l_n , altså andelen sykler ved de to stedene etter n døgn.

Tips: Husk at $\mathbf{x}_0 = U\mathbf{c} = c_1\chi_1 + c_2\chi_2$, hvor c_1 og c_2 er koordinatene til $\mathbf{x}_0$ i den nye basisen du fant i spørsmål d), og χ_1 og χ_2 er egenvektorene du har valgt.

Etter n døgn vil andelen sykler på de to stedene være gitt ved

$$\mathbf{x}_n = A^n \mathbf{x}_0 = A^n (U\mathbf{c}) = A^n (c_1\chi_1 + c_2\chi_2) = c_1 A^n \chi_1 + c_2 A^n \chi_2$$

Siden χ_1 og χ_2 er egenvektorer til A , blir $A\chi_1 = \lambda_1\chi_1$ og $A\chi_2 = \lambda_2\chi_2$.

Vi får da

$$\mathbf{x}_n = c_1 A^n \chi_1 + c_2 A^n \chi_2 = c_1 \lambda_1^n \chi_1 + c_2 \lambda_2^n \chi_2$$

Setter vi nå inn tallverdiene $c_1 = 0.2$, $c_2 = 0.1$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0.5$, $\chi_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ og $\chi_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, får vi

$$\mathbf{x}_n = 0.2 \cdot 1^n \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} + 0.1 \cdot 0.5^n \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6 \\ 0.4 \end{bmatrix} + 0.5^n \cdot \begin{bmatrix} -0.1 \\ 0.1 \end{bmatrix}$$

Siden $\mathbf{x}_n = \begin{bmatrix} e_n \\ l_n \end{bmatrix}$, gir dette

$$\underline{\underline{e_n = 0.6 - 0.1 \cdot 0.5^n}}$$

$$\underline{\underline{l_n = 0.4 + 0.1 \cdot 0.5^n}}$$

f) Finn hvor stor andel av syklene som i det lange løp vil befinne seg ved henholdsvis Ekenäs og Långegärde (etter at alle syklene er innlevert på kvelden).

Siden $\lim_{n \rightarrow \infty} 0.5^n = 0$, finner vi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e_n = 0.6$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} l_n = 0.4$$

Dvs: I det lange løp vil 60 % av syklene befinne seg ved Ekenäs og 40 % ved Långegärde.

OPPGAVE 6 (15 %)

Finn den generelle løsningen av differensialligningen

$$y'' + 2y' + 5y = 2 \cos t + 4 \sin t$$

Dette er en lineær, annenordens inhomogen ligning. Løsningen av denne er $y = y_h + y_p$, hvor y_h er den generelle løsningen av den tilhørende homogene ligningen, og y_p er en partikulær løsning av den inhomogene ligningen.

Vi løser derfor først den tilhørende homogene ligningen, altså ligningen

$$y'' + 2y' + 5y = 0$$

Denne kan løses ved å finne og løse den karakteristiske ligningen:

$$\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$$

Denne har løsninger

$$\lambda = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{-2 \pm 4i}{2} = -1 \pm 2i$$

Den generelle løsningen av den tilhørende homogene ligningen, er følgende

$$\underline{y_h = e^{-t} (C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t)}$$

En partikulær løsning av den inhomogene ligningen finner vi ved å anta at en funksjon på samme formen som høyre side av ligningen, vil være en slik løsning. Vi antar derfor at følgende funksjon er en løsning:

$$y = K_1 \cos t + K_2 \sin t$$

Denne gir

$$y' = -K_1 \sin t + K_2 \cos t$$

og

$$y'' = -K_1 \cos t - K_2 \sin t$$

Vi må så sette inn disse uttrykkene i ligningen for å bestemme hva K_1 og K_2 må være for at dette skal være en løsning. Setter vi uttrykkene inn, får vi

$$-K_1 \cos t - K_2 \sin t + 2(-K_1 \sin t + K_2 \cos t) + 5(K_1 \cos t + K_2 \sin t) = 2 \cos t + 4 \sin t$$

Ganger vi ut parentesene, får vi

$$-K_1 \cos t - K_2 \sin t - 2K_1 \sin t + 2K_2 \cos t + 5K_1 \cos t + 5K_2 \sin t = 2 \cos t + 4 \sin t$$

Sammenholder vi koeffisientene foran cosinus-leddene på venstre side med cosinus-leddet på høyre side, og tilsvarende for sinus, får vi

$$-K_1 + 2K_2 + 5K_1 = 2 \quad \wedge \quad -K_2 - 2K_1 + 5K_2 = 4$$

Vi løser så dette ligningssettet for å finne K_1 og K_2 :

$$4K_1 = 2 - 2K_2 \quad \wedge \quad 4K_2 - 2K_1 = 4$$

$$K_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}K_2 \quad \wedge \quad 4K_2 - 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}K_2\right) = 4$$

$$K_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}K_2 \quad \wedge \quad 4K_2 - 1 + K_2 = 4$$

$$K_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}K_2 \quad \wedge \quad 5K_2 = 5$$

$$K_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}K_2 \quad \wedge \quad K_2 = 1$$

$$K_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot 1 \quad \wedge \quad K_2 = 1$$

$$K_1 = 0 \quad \wedge \quad K_2 = 1$$

Vi har dermed funnet at følgende funksjon er en partikulær løsning av differensialligningen:

$$\underline{y_p} = 0 \cdot \cos t + 1 \cdot \sin t = \underline{\sin t}$$

Den generelle løsningen av differensialligningen er følgelig

$$y = y_h + y_p =$$

$$\underline{\underline{e^{-t} (C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t) + \sin t}}$$

OPPGAVE 7 (15 %)

Bruk laplacetransformasjonen til å løse følgende initialverdiproblem:

$$y'' + y' - 6y = 13\delta(t) \quad y(0) = 0, y'(0) = -3$$

Vi transformerer ligningen ved hjelp av laplacetransformasjonen, og får:

$$s^2 Y - s \cdot y(0) - y'(0) + sY - y(0) - 6Y = 13\mathcal{L}(\delta(t))$$

Den transformerte av $\delta(t)$ er lik 1. Setter vi også inn initialbetingelsene, vi får

$$s^2 Y - (-3) + sY - 6Y = 13$$

Vi flytter alt som ikke inneholder Y over på høyre side, og får

$$s^2 Y + sY - 6Y = 13 - 3$$

Så løser vi med hensyn på Y ved først å ta Y utenfor en parentes på venstre side:

$$(s^2 + s - 6)Y = 10$$

Vi deler med uttrykket foran Y , og får følgende:

$$Y(s) = \frac{10}{s^2 + s - 6}$$

For å finne $y(t)$ må vi inverstransformere. Dersom nevneren har reelle røtter, kan vi delbrøkkoppspalte. Vi sjekker dette:

$$s^2 + s - 6 = 0$$

som har løsninger

$$s = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2}$$

Nevneren har følgende røttene

$$s_1 = \frac{-1 + 5}{2} = 2$$

og

$$s_2 = \frac{-1 - 5}{2} = -3$$

Nevneren kan derfor skrives $s^2 + s - 6 = (s - 2)(s + 3)$. Vi kan derfor delbrøkkoppspalte uttrykket for $Y(s)$:

$$\frac{10}{s^2 + s - 6} = \frac{A}{s - 2} + \frac{B}{s + 3}$$

Vi ganger begge sider med $(s - 2)(s + 3)$, og får

$$\frac{10}{s^2 + s - 6}(s - 2)(s + 3) = \frac{A}{s - 2}(s - 2)(s + 3) + \frac{B}{s + 3}(s - 2)(s + 3)$$

Vi forkorter, og får

$$10 = A(s + 3) + B(s - 2)$$

Vi kan bestemme A og B ved å sette inn tall for s .

$s = 2$ gir

$$10 = A(2 + 3) + B(2 - 2)$$

$$10 = 5A + 0B$$

$$\underline{A = 2}$$

$s = -3$ gir

$$10 = A(-3 + 3) + B(-3 - 2)$$

$$10 = 0A - 5B$$

$$\underline{B = -2}$$

Vi kan følgelig skrive

$$Y(s) = \frac{2}{s-2} - \frac{2}{s+3}$$

Inverstransformerer vi denne, får vi

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}(Y(s)) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{s-2}\right) - \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{s+3}\right) =$$

$$2\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-2}\right) - 2\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+3}\right) =$$

$$2e^{2t} - 2e^{-3t} =$$

$$\underline{\underline{2(e^{2t} - e^{-3t})}}$$