Høgskolen i Østfold

23. mai 2017

EKSAMEN – løsningsforslag

Emnekode:	**Emnenavn:**
ITD15013	Matematikk 1 – andre deleksamen
Dato: 22. mai 2017	**Eksamenstid:** 09.00 – 12.00
Hjelpemidler: - To A4-ark med valgfritt innhold på begge sider. - Formelhefte. - Kalkulator som deles ut samtidig med oppgaven.	**Faglærer:** Christian F Heide

Om eksamensoppgaven og poengberegning:

Oppgavesettet består av 6 sider inklusiv denne forsiden og to vedlegg. Kontroller at oppgavesettet er komplett.

Oppgavesettet består av 8 oppgaver med i alt 11 deloppgaver. Ved sensur vil alle deloppgaver telle like mye.

Husk å vise utregninger og hvordan du kommer fram til svarene. Husk også å begrunne dine svar der det er naturlig.

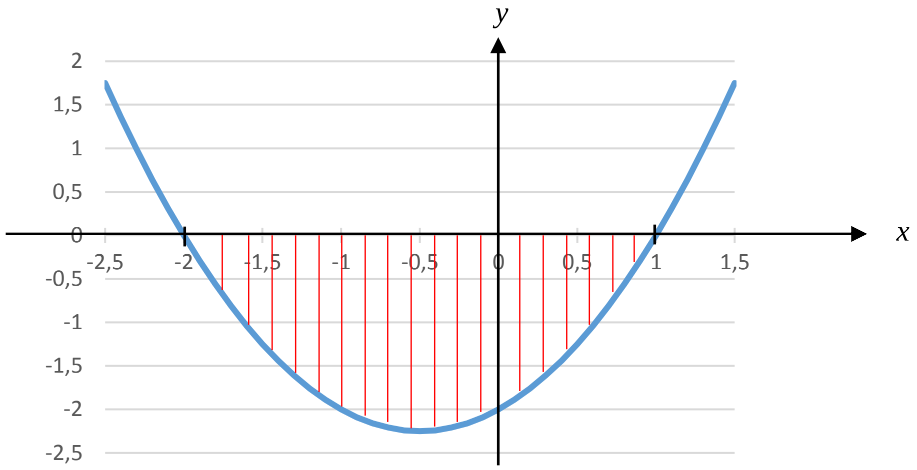
Sensurfrist:

15. juni 2017

Karakterene er tilgjengelige for studenter på Studentweb senest 2 virkedager etter oppgitt sensurfrist. www.hiof.no/studentweb

Oppgave 1

Nedenfor er grafen til $f(x) = x^2 + x - 2$ *vist.*



Finn arealet av flaten avgrenset av denne funksjonen og x-aksen, altså arealet av den skraverte flaten.

Arealet av flaten er gitt ved

$$A = -\int_{-2}^{1} f(x)dx$$

Vi må ha minus foran integralet fordi flaten ligger under x-aksen. Dette gir

$$A = -\int_{-2}^{1} f(x)dx = \int_{1}^{-2} f(x)dx = \int_{1}^{-2} (x^2 + x - 2)dx =$$

$$\left[\tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{2}x^2 - 2x\right]_1^{-2} = \tfrac{1}{3}(-2)^3 + \tfrac{1}{2}(-2)^2 - 2\cdot(-2) - (\tfrac{1}{3}\cdot 1^3 + \tfrac{1}{2}\cdot 1^2 - 2\cdot 1) =$$

$$-\frac{8}{3} + \frac{4}{2} + 4 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2 = \underline{\underline{\frac{9}{2}}}$$

Oppgave 2

Grafen til funksjonen $f(x) = \sqrt{\dfrac{x}{1+x^2}}$ *mellom x = 0 og x = 1 roteres om x-aksen. Finn volumet til det omdreiningslegemet som da framkommer.*

Dette volumet er gitt ved

$$V=\pi\int_0^1 \left(f(x)\right)^2 dx=\pi\int_0^1\left(\sqrt{\frac{x}{1+x^2}}\right)^2 dx=\pi\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx$$

For å kunne integrere denne, må vi bruke substitusjonen

$$u=1+x^2$$

som gir

$$\frac{du}{dx}=2x$$

og altså

$$dx=\frac{1}{2x}\,du$$

Setter vi dette inn i integralet, får vi

$$V=\pi\int_0^1 \frac{x}{u}\cdot\frac{1}{2x}\,du=\frac{\pi}{2}\int_{x=0}^{x=1}\frac{1}{u}\,du=\frac{\pi}{2}\cdot\left[\ln u\right]_{x=0}^{x=1}=$$

$$\frac{\pi}{2}\cdot\left[\ln(1+x^2)\right]_0^1=\frac{\pi}{2}\cdot\left(\ln(1+1^2)-\ln(1+0^2)\right)=$$

$$\frac{\pi}{2}\cdot(\ln 2-\ln 1)=\frac{\pi}{2}\cdot(\ln 2-0)=$$

$$\underline{\underline{\frac{\pi\cdot\ln 2}{2}}}\approx 1.09$$

Oppgave 3

Gitt matrisene

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 1\\ 3 & 2 & 0\\ 1 & -1 & 2\end{bmatrix}\quad og \quad B=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 2 & 0\\ 4 & 4 & 4\end{bmatrix}$$

a) *Finn AB.*

$$AB=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 1\\ 3 & 2 & 0\\ 1 & -1 & 2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 2 & 0\\ 4 & 4 & 4\end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix} (-1)\cdot 1+1\cdot 2+1\cdot 4 & (-1)\cdot 0+1\cdot 2+1\cdot 4 & (-1)\cdot 0+1\cdot 0+1\cdot 4 \\ 3\cdot 1+2\cdot 2+0\cdot 4 & 3\cdot 0+2\cdot 2+0\cdot 4 & 3\cdot 0+2\cdot 0+0\cdot 4 \\ 1\cdot 1+(-1)\cdot 2+2\cdot 4 & 1\cdot 0+(-1)\cdot 2+2\cdot 4 & 1\cdot 0+(-1)\cdot 0+2\cdot 4 \end{bmatrix} =$$

$$\underline{\underline{\begin{bmatrix} 5 & 6 & 4 \\ 7 & 4 & 0 \\ 7 & 6 & 8 \end{bmatrix}}}$$

b) Finn B^{-1}.

For å finne B^{-1} lager vi matrisen

$$[B \mid I_3]$$

og utfører elementære rekkeoperasjoner for å gjøre venstre halvdel til identitetsmatrisen:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} \\ R_2' = R_2 - 2R_1 \\ R_3' = R_3 - 4R_1 \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 4 & 4 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad R_2' = \tfrac{1}{2} R_2$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right] \quad R_3' = R_3 - 4R_2$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{array}\right] \quad R_3' = \tfrac{1}{4} R_3$$

Nå er venstre halvdel blitt identitetsmatrisen. Høyre halvdel vil da være B^{-1}:

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

Oppgave 4

Gitt følgende matrise:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & -2 \\ 2 & 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

a) *Løs ligningssystemet A**x** =* **0**.

Vi løser ligningssystemet ved gauss-jordaneliminasjon:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & -2 \\ 2 & 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & -4 & 2 \end{bmatrix} \quad R_3' = R_3 - 2R_1$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & -4 & 2 \end{bmatrix} \quad R_2' = \tfrac{1}{2} R_2$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad R_3' = R_3 + 2R_2$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad R_1' = R_1 - R_2$$

Matrisen er nå på redusert trappeform.

Vi ser at vi får to frie variable, og vi setter

$$\underline{x_4 = s} \text{ og } \underline{x_3 = t}$$

Rekke 2 i matrisen gir

$$x_2 + 2x_3 - x_4 = 0$$

og altså

$$x_2 = -2x_3 + x_4 = \underline{-2t + s}$$

Rekke 1 gir

$$x_1 - x_3 + 2x_4 = 0$$

og følgelig

$$x_1 = x_3 - 2x_4 = \underline{t - 2s}$$

Oppsummert blir løsningen av ligningssystemet følgelig

$$\underline{\underline{x_1 = t - 2s \quad x_2 = -2t + s \quad x_3 = t \quad x_4 = s}}$$

eller, skrevet på vektorform:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} t-2s \\ -2t+s \\ t \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ -2t \\ t \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2s \\ s \\ 0 \\ s \end{bmatrix} = \underline{\underline{t \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + s \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}}$$

b) *Finn en basis for kolonnerommet til A og en basis for nullrommet til A.*

Kolonnerommet er det rommet som utspennes av kolonnevektorene i matrisen. En basis for kolonnerommet finner vi fra den reduserte trappeformen: Det er kolonne 1 og 2 som har ledende elementer. Derfor utgjør kolonne 1 og 2 i den opprinnelig matrisen en basis for kolonnerommet, altså:

$$\underline{\underline{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}}}$$

Nullrommet til en matrise, er mengden av alle løsningen til ligningssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Dette ligningssystemet løste vi i oppgave a), og vi kan bruke løsningen fra denne oppgaven. En basis for nullrommet finner vi fra løsningen i oppgave a) skrevet på vektorform:

$$\underline{\underline{\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}}$$

Oppgave 5

Gitt følgende matrise

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 7 & -4 \end{bmatrix}$$

Finn egenverdiene og de tilhørende egenvektorsettene til A.

Vi finner egenverdiene ved å løse ligningen

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 7 & -4-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Regner vi ut determinanten, får vi

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 7 & -4-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(-4-\lambda) - 1 \cdot 7 = -8 - 2\lambda + 4\lambda + \lambda^2 - 7 = \lambda^2 + 2\lambda - 15$$

Den karakteristiske ligningen blir følgelig

$$\lambda^2 + 2\lambda - 15 = 0$$

Løser vi denne, finner vi egenverdiene

$$\underline{\underline{\lambda_1 = 3 \quad \lambda_2 = -5}}$$

Vi kan nå finne egenvektorsettene. Hvert egenvektorsett er løsningen av ligningen $A\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}$. Dette ligningssystemet kan omskrives som $(A - \lambda I)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$.

Egenvektorsettet tilhørende egenverdi $\lambda_1 = 3$ blir derfor løsningen av det homogene ligningssystemet

$$(A - 3I)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

Koeffisientmatrisen til dette ligningssystemet blir

$$\begin{bmatrix} 2-3 & 1 \\ 7 & -4-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 7 & -7 \end{bmatrix}$$

Vi løser så ligningssystemet på vanlig måte ved å bringe koeffisientmatrisen på trappeform:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 7 & -7 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad R_2' = R_2 + 7R_1$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad R_1' = (-1)R_1$$

Vi får her én fri variabel, og vi setter $x_2 = s$. Rekke 1 gir da

$$x_1 - x_2 = 0$$

og altså

$$x_1 = x_2 = s$$

Egenvektorsettetet tilhørende egenverdien $\lambda_1 = 3$ er følgelig

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \\ s \end{bmatrix} = s \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad s \neq 0$$

Egenvektorsettet tilhørende egenverdi $\lambda_2 = -5$ blir løsningen av det homogene ligningssystemet

$$(A - (-5)I)\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

Koeffisientmatrisen til dette ligningssystemet blir

$$\begin{bmatrix} 2+5 & 1 \\ 7 & -4+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}$$

Vi løser så ligningssystemet på vanlig måte ved å bringe koeffisientmatrisen på trappeform:

$$\begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad R_2' = R_2 - R_1$$

Vi får her én fri variabel, og vi setter $x_2 = r$. Rekke 1 gir da

$$7x_1 + x_2 = 0$$

og altså

$$x_1 = -\tfrac{1}{7}x_2 = -\tfrac{1}{7}r$$

Egenvektorsettet tilhørende egenverdien $\lambda_2 = -5$ kan følgelig skrives

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\tfrac{1}{7}r \\ r \end{bmatrix} = r \cdot \begin{bmatrix} -\tfrac{1}{7} \\ 1 \end{bmatrix} \qquad r \neq 0$$

Siden *r* er en vilkårlig konstant, kan vi – dersom vi ønsker å unngå brøker i løsningen – skrive denne som

$$\underline{\underline{\boldsymbol{x} = t \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -7 \end{bmatrix} \qquad t \neq 0}}$$

Oppgave 6

Bestem den generelle løsningen til følgende differensialligning:

$$y'' + 5y' + 6y = 3e^{-2x}$$

Vi løser først den tilhørende homogene ligningen:

$$y'' + 5y' + 6y = 0$$

Denne differensialligningen har konstante koeffisienter, og den kan derfor løses ved å løse dens karakteristiske ligning:

$$\lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0$$

Denne har løsningene

$$\lambda = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1} = \frac{-5 \pm 1}{2}$$

$$\lambda_1 = \frac{-5+1}{2} = -2 \qquad \text{og} \qquad \lambda_2 = \frac{-5-1}{2} = -3$$

Med to reelle løsninger av den karakteristiske ligningen, vil den generelle (allmenne) løsningen av denne differensialligningen være

$$\underline{y_h = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-3x}}$$

Vi må så finne en partikulær løsning av den inhomogene ligningen. Hovedregelen er at vi skal forsøke med en løsning som er på samme formen som høyre side av ligningen. I vårt tilfelle vil det være $y = Ke^{-2x}$. Problemet med denne, er at vi alt har denne i løsningen y_h (i leddet $C_1 e^{-2x}$). Vi må derfor oppgradere (altså gange med *x*), og forsøker med

$$y = Kxe^{-2x}$$

Dette gir

$$y' = Ke^{-2x} + Kx(-2)e^{-2x} = Ke^{-2x} - 2Kxe^{-2x}$$

og

$$y'' = -2Ke^{-2x} - 2Ke^{-2x} - 2Kx(-2)e^{-2x} = -4Ke^{-2x} + 4Kxe^{-2x}$$

Setter vi så dette inn i differensialligningen, får vi

$$-4Ke^{-2x} + 4Kxe^{-2x} + 5(Ke^{-2x} - 2Kxe^{-2x}) + 6Kxe^{-2x} = 3e^{-2x}$$

Vi deler hele ligningen med e^{-2x} og ganger ut parentesen:

$$-4K + 4Kx + 5K - 10Kx + 6Kx = 3$$

som gir

$$\underline{K = 3}$$

Vi har da vist at følgende er en partikulærløsning av differensialligningen:

$$\underline{y_p = 3xe^{-2x}}$$

Den generelle løsningen av differensialligningen blir derfor

$$y = y_h + y_p = \underline{\underline{C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-3x} + 3xe^{-2x}}}$$

Oppgave 7

Løs følgende initialverdiproblem:

$$y' - e^{-y} \sin x = 0 \qquad y(0) = 0$$

Denne kan vi forsøke å løse ved separering. Vi flytter først leddet $-e^{-y} \sin x$ over på høyre side, og får:

$$y' = e^{-y} \sin x$$

Vi ganger så begge sider med e^y, og får:

$$e^y y' = \sin x$$

Det er vanlig å skrive y' som $\frac{dy}{dx}$ for å tydeliggjøre den videre fremgangsmåten. Gjør vi det, får vi:

$$e^y \frac{dy}{dx} = \sin x$$

Ligningen er nå separert, og vi kan integrere begge sider med hensyn på x:

$$\int e^y \frac{dy}{dx} dx = \int \sin x \, dx$$

$$\int e^y \, dy = \int \sin x \, dx$$

$$e^y = -\cos x + C$$

Vi løser så med hensyn på y ved å ta logaritmen på begge sider:

$$\ln e^y = \ln(-\cos x + C)$$

som gir

$$y = \ln(-\cos x + C)$$

Vi kan så bruke initialbetingelsen for å bestemme C:

$$\ln(-\cos 0 + C) = 0$$

$$\ln(-1 + C) = 0$$

Vi eksponentierer begge sider, og får

$$e^{\ln(-1+C)} = e^0$$

$$-1 + C = 1$$

$$\underline{C = 2}$$

Følgelig er løsningen av initialverdiproblemet

$$y = \ln(-\cos x + 2) = \underline{\underline{\ln(2 - \cos x)}}$$

Oppgave 8

a) *Finn laplacetransformen til følgende funksjon*:

$$f(t)=\begin{cases}0 & for \quad t<1\\ 2 & for \;\; 1\le t<2\\ 0 & for \quad t\ge 2\end{cases}$$

Her har vi to muligheter: Vi kan bruke definisjonen av laplacetransformasjonen eller vi kan skrive *f*(*t*) ved hjelp av sprangfunksjonen *u*(*t* – *a*). Jeg viser her begge muligheter, men i besvarelsen er det tilstrekkelig studentene har med en av dem. Jeg viser først metoden med å bruke sprangfunksjoner.

Bruker vi enhetssprangfunksjoner, kan vi skrive *f*(*t*)

$$f(t)=2u(t-1)-2u(t-2)$$

Den laplacetransformerte av *u*(*t* – *a*) er $\frac{1}{s}e^{-as}$. Laplacetransformen til *f*(*t*) er følgelig

$$F(s)=\frac{2}{s}e^{-s}-\frac{2}{s}e^{-2s}=\underline{\underline{\frac{2}{s}\left(e^{-s}-e^{-2s}\right)}}$$

Alternativt kan vi altså løse oppgaven ved å bruke definisjonen av laplacetransformasjonen:

$$F(s)=\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt=\int_0^1 0\cdot e^{-st}dt+\int_1^2 2\cdot e^{-st}dt+\int_2^\infty 0\cdot e^{-st}dt=$$

$$\int_1^2 2\cdot e^{-st}dt=2\int_1^2 e^{-st}dt=2\left(-\frac{1}{s}\right)\left[e^{-st}\right]_1^2=-\frac{2}{s}\left(e^{-2s}-e^{-s}\right)=$$

$$\underline{\underline{\frac{2}{s}\left(e^{-s}-e^{-2s}\right)}}$$

b) *Bruk laplacetransformasjonen til å løse følgende initialverdiproblem*:

$$y''+y=\delta(t)-\delta(t-4), \qquad y(0)=0, \quad y'(0)=0$$

Laplacetransformerer vi differensialligningen, får vi

$$s^2Y-s\cdot 0-0+Y=1-e^{-4s}$$

som etter ordning gir

$$s^2Y + Y = 1 - e^{-4s}$$

Vi trekker Y utenfor en parentes på venstre side, og får

$$(s^2 + 1)Y = 1 - e^{-4s}$$

Så deler vi ligningen på uttrykket i parentesen, og får

$$Y(s) = \frac{1}{s^2+1} - \frac{e^{-4s}}{s^2+1}$$

Inverstransformen til det første leddet finner vi direkte fra oversikten over laplacetransformer:

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+1}\right) = \sin t$$

For å inverstransformere det siste leddet, benytter vi at

$$\mathcal{L}\left(y(t-a)\,u(t-a)\right) = e^{-as}Y(s)$$

Vi får da

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+1}e^{-4s}\right) = u(t-4)\cdot\sin(t-4)$$

Løsningen blir følgelig

$$\underline{\underline{y(t) = \sin t - u(t-4)\sin(t-4)}}$$