

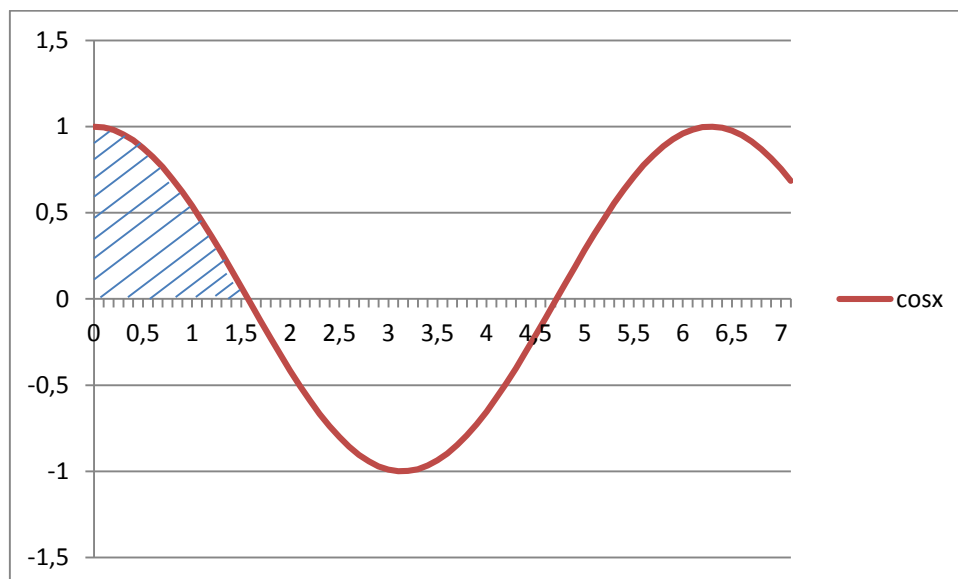
EKSAMEN

Løsningsforslag

Emnekode: ITD15013 og ITD15012	Emne: Matematikk 1 – andre deleksamen
Dato: 18. mai 2015	Eksamenstid: 09.00 – 12.00
Hjelpemidler: - To A4-ark med valgfritt innhold på begge sider. - Formelhefte. Kalkulator er ikke tillatt .	Faglærer: Christian F Heide
Eksamensoppgaven: Oppgavesettet består av seks sider inklusiv denne forsiden og to vedlegg. Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene. Oppgavesettet består av 8 oppgaver med i alt 11 delspørsmål. Ved sensur vil alle delspørsmål telle like mye. Der det er mulig skal du: • vise utregninger og hvordan du kommer fram til svarene • begrunne dine svar, selv om dette ikke er eksplisitt sagt i hvert spørsmål	
Sensurdato: 10. juni 2015 Karakterene er tilgjengelige for studenter på studentweb senest 2 virkedager etter oppgitt sensurfrist. Følg instruksjoner gitt på: www.hiof.no/studentweb	

Oppgave 1

Figuren viser funksjonen $y = \cos x$.



- a) Finn arealet av det skraverte området, altså arealet under grafen til $\cos x$ fra $x = 0$ til der grafen skjærer x -aksen.

Dette arealet finner vi ved å integrere $\cos x$ mellom 0 og der funksjonen skjærer x -aksen. Dette skjer der $\cos x = 0$, altså ved $x = \frac{\pi}{2}$:

$$A = \int_0^{\pi/2} \cos x \, dx = [\sin x]_0^{\pi/2} = (\sin \frac{\pi}{2} - \sin 0) = 1 - 0 = \underline{\underline{1}}$$

- b) Det skraverte feltet roteres om y -aksen. Finn volumet av det omdreingslegemet som da framkommer.

Omkretsen av et infinitesimalt tynt sylinderskall om y -aksen, vil være $O = 2\pi r = 2\pi x$ fordi radius vil være x . Høyden til skallet vil være $y = \cos x$. Arealet av dette sylinderskallet er omkretsen ganger høyden, og vil følgelig være $A = 2\pi x \cdot \cos x$.

Volumet av et slikt sylinderskall som har en tykkelse på dx vil være

$dV = 2\pi x \cdot \cos x \, dx$. Volumet av hele omdreingslegemet vil derfor være integralet av

dette mellom 0 og $\frac{\pi}{2}$:

$$V = \int_0^{\pi/2} 2\pi x \cos x \, dx = 2\pi \int_0^{\pi/2} x \cos x \, dx$$

Her må vi bruke delvis integrasjon for å finne integralet (dersom ikke det står i formelsamlingen). Regelen for delvis integrasjon kan skrives slik:

$$\int u'v \, dx = uv - \int uv' \, dx$$

Vi velger

$$u' = \cos x \quad \text{og} \quad v = x$$

som gir

$$u = \sin x \quad \text{og} \quad v' = 1$$

Følgelig får vi

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \left[x \cdot \sin x \right]_0^{\pi/2} - 2\pi \int_0^{\pi/2} 1 \cdot \sin x \, dx \\ &= 2\pi \left(\frac{\pi}{2} \cdot \sin \frac{\pi}{2} - (0 \cdot \sin 0) \right) - 2\pi \int_0^{\pi/2} \sin x \, dx \\ &= 2\pi \left(\frac{\pi}{2} \cdot 1 - 0 \right) - 2\pi [-\cos x]_0^{\pi/2} \\ &= \pi^2 - 2\pi(-\cos \frac{\pi}{2} - (-\cos 0)) \\ &= \pi^2 - 2\pi(0 + 1) \\ &= \underline{\underline{\pi^2 - 2\pi}} \end{aligned}$$

Oppgave 2

Løs differensialligningen

$$xy' + 4y = x^3 - x \quad x > 0$$

Denne er ikke separerbar, men kan vi løse ved å bruke metoden med integrerende faktor. Vi må først bringe den på standard form ved å dele alle ledd med x :

$$y' + \frac{4}{x}y = x^2 - 1$$

Vi finner så en antiderivert til faktoren foran y :

$$\int \frac{4}{x} dx = 4 \ln |x|$$

Siden det er oppgitt at $x > 0$ trenger vi ikke å ta absoluttverdien til x , og følgelig har vi at

$$4 \ln |x| = 4 \ln x$$

Den integrerende faktor finner vi ved å eksponentiere dette, dvs:

$$e^{4 \ln x}$$

Vi kan videre benytte regelen $a \ln b = \ln b^a$ på eksponenten, og får at dette er

$$e^{4\ln x} = e^{\ln x^4} = x^4$$

Vi ganger så hele differensialligningen med x^4 som er den såkalte integrerende faktor, og får

$$x^4 \cdot y' + x^4 \cdot \frac{4}{x} y = x^4 \cdot x^2 - x^4$$

som etter ordning blir

$$x^4 y' + 4x^3 y = x^6 - x^4$$

Venstre side kan nå forenkles slik at vi kan skrive ligningen slik:

$$(x^4 y)' = x^6 - x^4$$

Vi integrerer så begge sider med hensyn på x :

$$\int (x^4 y)' dx = \int (x^6 - x^4) dx$$

som gir

$$x^4 y = \frac{1}{7} x^7 - \frac{1}{5} x^5 + C$$

Vi løser så med hensyn på y ved å gange hele ligningen med x^{-4} :

$$y = \frac{1}{7} x^{7-4} - \frac{1}{5} x^{5-4} + Cx^{-4}$$

dvs.

$$\underline{\underline{y = \frac{1}{7} x^3 - \frac{1}{5} x + Cx^{-4}}}$$

Oppgave 3

Løs differensialligningen

$$y'' - 4y' + 3y = 0$$

med grensebetingelsene $y(0) = 7$ og $y'(0) = 11$.

Denne differensialligningen har konstante koeffisienter, og vi kan derfor bruke teknikken med karakteristisk ligning. Den karakteristiske ligningen er

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$$

med løsninger

$$\lambda = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm 2}{2}$$

$$\lambda_1 = \frac{4+2}{2} = 3 \quad \text{og} \quad \lambda_2 = \frac{4-2}{2} = 1$$

Med to reelle løsninger av den karakteristiske ligningen, vil den generelle (allmenne) løsningen av differensialligningen være (det er ikke angitt i oppgaven hva den frie variabelen heter, så jeg velger å kalle den x):

$$\underline{y = C_1 e^{3x} + C_2 e^x}$$

Vi bruker så grensebetingelsene $y(0) = 7$ og $y'(0) = 11$ for å finne konstantene i den generelle løsningen.

$y(0) = 7$ gir:

$$C_1 e^{3 \cdot 0} + C_2 e^0 = 7$$

dvs.

$$C_1 + C_2 = 7$$

eller

$$C_2 = 7 - C_1$$

For å kunne bruke den andre grensebetingelsen, må vi derivere den generelle løsningen:

$$y' = 3C_1 e^{3x} + C_2 e^x$$

Setter vi så inn betingelsen $y'(0) = 11$ får vi

$$3C_1 e^{3 \cdot 0} + C_2 e^0 = 11$$

som gir

$$3C_1 + C_2 = 11$$

Setter vi så inn det vi fant ovenfor, altså $C_2 = 7 - C_1$, får vi

$$3C_1 + (7 - C_1) = 11$$

som gir

$$3C_1 - C_1 = 11 - 7$$

dvs.

$$C_1 = 2$$

og følgelig

$$C_2 = 7 - 2 = 5$$

Løsningen blir derfor

$$\underline{\underline{y = 2e^{3x} + 5e^x}}$$

Oppgave 4

Bruk laplacetransformasjonen til å løse følgende initialverdiproblem, hvor $\delta(t)$ er en enhetspuls (Diracs delta):

$$y'' + 4y = \delta(t), \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 1$$

Laplacetransformerer vi ligningen, får vi

$$s^2 Y - s \cdot 3 - 1 + 4Y = 1$$

Vi ordner denne slik at alle ledd med Y kommer på venstre side og resten på høyre side:

$$s^2 Y + 4Y = 3s + 2$$

Vi setter Y utenfor parentes på venstre side:

$$(s^2 + 4)Y = 3s + 2$$

Vi deler med $(s^2 + 4)$ på begge sider og får

$$Y = \frac{3s + 2}{s^2 + 4}$$

Vi ser at nevneren ikke har reelle røtter (fordi $s^2 + 4 = 0$ ikke har reelle løsninger). Vi må derfor se om vi kan bruke laplacetransformene til sinus og cosinus for å finne $y(t)$. Vi deler da opp uttrykket på følgende måte:

$$Y = \frac{3s}{s^2 + 4} + \frac{2}{s^2 + 4} = 3 \frac{s}{s^2 + 2^2} + \frac{2}{s^2 + 2^2}$$

Fra tabellen med laplacetransformasjoner ser vi at

$$\mathcal{L}(\cos \omega t) = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

og

$$\mathcal{L}(\sin \omega t) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

Dette betyr at

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2 + 2^2}\right) = \cos 2t$$

og

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{s^2 + 2^2}\right) = \sin 2t$$

Dvs

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(3\frac{s}{s^2 + 2^2} + \frac{2}{s^2 + 2^2}\right) = \underline{\underline{3\cos 2t + \sin 2t}}$$

Oppgave 5

Finn egenverdier og tilhørende egenvektorsett til følgende matrise:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

Vi finner først egenverdiene. Egenverdiene er de λ som er løsninger av ligningen $\det(A - \lambda I) = 0$. Vi finner først denne determinanten:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3 - \lambda & -1 \\ -2 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = (3 - \lambda)(2 - \lambda) - (-1)(-2) = \lambda^2 - 5\lambda + 4$$

Vi finner så de λ som gjør denne lik 0:

$$\lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0$$

som gir

$$\lambda = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2}$$

Egenverdiene er følgende

$$\underline{\underline{\lambda_1}} = \frac{5+3}{2} = \underline{\underline{4}} \quad \text{og} \quad \underline{\underline{\lambda_2}} = \frac{5-3}{2} = \underline{\underline{1}}$$

Egenvektorene er de $\mathbf{x}$ -vektorer som er ikke-trivielle løsninger av ligningssystemene

$$(A - \lambda_1 I) \cdot \mathbf{x} = 0 \quad \text{og} \quad (A - \lambda_2 I) \cdot \mathbf{x} = 0$$

Egenvektorsettet tilhørende $\underline{\lambda_1 = 4}$:

Koeffisientmatrisen til dette ligningssystemet er

$$(A - \lambda_1 I) = \begin{bmatrix} 3-4 & -1 \\ -2 & 2-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$$

Løsningen av ligningssystemet $(A - \lambda_1 I) \cdot \mathbf{x} = 0$ finner vi nå ved elementære rekkeoperasjoner på denne koeffisientmatrisen:

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad R_2' = R_2 - 2R_1$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad R_1' = (-1) \cdot R_1$$

Her vil da x_2 kunne være en fri variabel, og vi setter

$$x_2 = s$$

Første rekke gir følgende ligning:

$$x_1 + x_2 = 0$$

som med $x_2 = s$ gir

$$x_1 = -x_2 = -s$$

Skrevet på vektorform blir denne løsningen:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -s \\ s \end{bmatrix} = s \underline{\underline{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}}}, \quad s \neq 0$$

Egenvektorsettet tilhørende $\lambda_2 = 1$:

Koeffisientmatrisen til dette ligningssystemet er

$$(A - \lambda_2 I) = \begin{bmatrix} 3-1 & -1 \\ -2 & 2-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Løsningen av ligningssystemet $(A - \lambda_2 I) \cdot \mathbf{x} = 0$ finner vi nå ved elementære rekkeoperasjoner på denne koeffisientmatrisen:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad R_2' = R_2 + R_1$$

x_2 kan være en fri variabel, og vi setter

$$x_2 = t$$

Første rekke gir følgende ligning:

$$2x_1 - x_2 = 0$$

dvs.

$$x_1 = \frac{1}{2}x_2$$

som med $x_2 = t$ gir

$$x_1 = \frac{1}{2}t$$

Skrevet på vektorform blir denne løsningen:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}t \\ t \end{bmatrix} = t \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad t \neq 0$$

eller dersom vi vil unngå brøker, kan vi skrive (siden t er vilkårlig):

$$\mathbf{x} = \underline{\underline{r \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}}}, \quad r \neq 0$$

Oppgave 6

Gitt en matrise

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

Den reduserte trappformen til denne matrisen er

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

a) Danner kolonnevektorene i matrisen A en basis for $\mathbb{R}^4$? Begrunn svaret.

For at kolonnevektorene i A skal danne en basis, må de være lineært uavhengige. Fordi en av rekkene i den reduserte trappformen består av bare nuller, vet vi at determinanten til A er 0. Dette innebærer at kolonnene i A ikke er lineært uavhengige, og de danner derfor ikke en basis for $\mathbb{R}^4$.

Dette kan alternativt begrunnes med at ligningssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ har ikke-trivielle løsninger.

b) Et vektorrom V er definert ved

$$V = \text{Span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \\ -4 \end{bmatrix} \right\}$$

Merk at disse vektorene er kolonnevektorene i matrisen A.

Finn en basis for V.

V er det vektorrommet som kolonnevektorene i A utspenner, også kalt kolonnerommet til A. En basis for dette rommet, er de kolonnene i A som har ledende elementer i den reduserte trappformen (som ble oppgitt i spørsmål a), altså kolonne 1, 2 og 3. En basis for V er følgelig

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

c) *Finn en basis for nullrommet til matrise A.*

Nullrommet til A er mengden av alle løsninger til ligningssystemet $Ax = \mathbf{0}$, og en basis finner vi når vi skriver løsningene på vektorform.

Av den reduserte trappformen til A som altså ser slik ut

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ser vi at vi kan velge x_4 som fri variabel, og vi setter $x_4 = s$. Fra rekke 3 finner vi

$$x_3 + x_4 = 0$$

og følgelig

$$x_3 = -x_4 = -s$$

Fra rekke 2 finner vi

$$x_2 + x_4 = 0$$

og følgelig

$$x_2 = -x_4 = -s$$

Fra rekke 1 finner vi

$$x_1 - 3x_4 = 0$$

og følgelig

$$x_1 = 3x_4 = 3s$$

Skrivet på vektorform blir denne løsningen

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3s \\ -s \\ -s \\ s \end{bmatrix} = s \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

En basis for nullrommet til A er derfor

$$\underline{\underline{\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}}}$$

Oppgave 7

Begrunn at følgende uendelige rekke konvergerer og finn summen:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{3^n}$$

Dette er en geometrisk rekke. Dersom en ikke ser dette direkte, kan en skrive ut rekken slik:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{3^n} = \frac{2^1}{3^0} + \frac{2^2}{3^1} + \frac{2^3}{3^2} + \dots$$

Vi ser at et ledd delt på det foregående alltid er $k = \frac{2}{3}$, og rekken er følgelig geometrisk.

Siden $|k| < 1$ konvergerer rekken.

Det første leddet er $a_0 = \frac{2^1}{3^0} = 2$, og summen er derfor

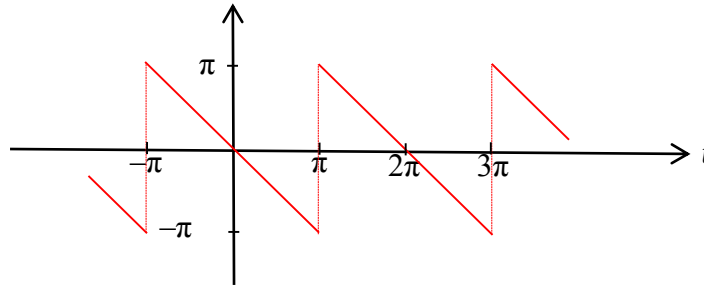
$$S = \frac{a_0}{1-k} = \frac{2}{1-\frac{2}{3}} = \frac{2}{\frac{1}{3}} = 2 \cdot 3 = \underline{\underline{6}}$$

Oppgave 8

Finn fourierrekken til den periodiske funksjonen $f(t)$ som har periode 2π og som er gitt ved:

$$f(t) = -t \quad -\pi \leq t < \pi$$

Vi kan først lage en skisse av funksjonen for å ha en ide om hvordan den ser ut:



Fourierrekken til en periodisk funksjon er gitt ved

$$f(t) \sim \frac{1}{2} a_0 + \sum_1^{\infty} (a_n \cos(\frac{n\pi}{L} t) + b_n \sin(\frac{n\pi}{L} t))$$

med fourierkoeffisienter gitt ved

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) dt$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \cdot \cos(\frac{n\pi}{L} t) dt$$

og

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \cdot \sin(\frac{n\pi}{L} t) dt$$

Vår funksjon har periode 2π og parameteren L som inngår i fourierintegralene og som er lik halve perioden, vil følgelig være $L = \frac{2\pi}{2} = \pi$.

Denne funksjonen er symmetrisk om 1.-aksen (t -aksen). a_0 vil derfor være 0. Dette vil vi også se dersom vi regner ut a_0 :

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (-t) dt = -\frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{2} t^2 \right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$= -\frac{1}{2\pi}(\pi^2 - (-\pi)^2) = -\frac{1}{2\pi} \cdot 0 = 0$$

Så regner vi ut koeffisientene foran cosinus-leddene:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (-t) \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{\pi} t\right) dt$$

Funksjonen vår er en odde funksjon (slike funksjoner har den egenskapen at $f(-t) = -f(t)$). Cosinus er en like funksjon (karakterisert ved at $f(-t) = f(t)$). En like ganger en odde funksjon, er en odde funksjon. Integralet av en odde funksjon fra $t = -p$ til $t = p$ vil være 0 uansett hva p er. Integralet vårt vil derfor være 0, og alle $a_n = 0$.

Koeffisientene foran sinus-leddene er gitt ved

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (-t) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{\pi} t\right) dt = -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \cdot \sin(nt) dt$$

Vi må bruke delvis integrasjon for å finne dette integralet. Vi velger oss

$$u' = \sin nt \quad \text{og} \quad v = t$$

som gir

$$u = -\frac{1}{n} \cos nt \quad \text{og} \quad v' = 1$$

Vi får da

$$\begin{aligned} b_n &= -\frac{1}{\pi} \left[t \left(-\frac{1}{n} \cos nt\right) \right]_{-\pi}^{\pi} - \left(-\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(-\frac{1}{n} \cos nt\right) dt \right) \\ &= \frac{1}{n\pi} (\pi \cos n\pi - (-\pi) \cos(-n\pi)) - \frac{1}{n\pi} \left[\frac{1}{n} \sin nt \right]_{-\pi}^{\pi} \end{aligned}$$

Fordi cosinus er en like funksjon, vil $\cos(-n\pi) = \cos n\pi$. Dette bruker vi når vi regner ut den første parentesen, og uttrykket blir da

$$b_n = \frac{1}{n\pi} (\pi \cos n\pi + \pi \cos n\pi) - \frac{1}{n^2\pi} (\sin n\pi - \sin(-n\pi))$$

Fordi sinus er en odde funksjon, vil $\sin(-n\pi) = -\sin n\pi$. Dette bruker vi når vi regner ut den andre parentesen, og uttrykket blir da

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{n\pi} 2\pi \cos n\pi - \frac{1}{n^2\pi} (\sin n\pi - (-\sin n\pi)) \\ &= \frac{2}{n} \cos n\pi - \frac{1}{n^2\pi} 2\sin n\pi \end{aligned}$$

Nå vet vi at $\sin n\pi = 0$ så lenge n er et heltall (for eksempel er $\sin 0 = 0$, $\sin \pi = 0$ og $\sin 2\pi = 0$). Det andre leddet blir derfor 0, og vi står igjen med at

$$b_n = \frac{2}{n} \cos n\pi$$

$\cos n\pi$ vil veksle mellom 1 og -1 ettersom n er henholdsvis et partall og et oddetall (for eksempel er $\cos 0 = 1$, $\cos \pi = -1$ og $\cos 2\pi = 1$). Vi kan derfor skrive

$$b_n = (-1)^n \cdot \frac{2}{n}$$

Fourierrekken for funksjonen er derfor

$$\begin{aligned} f(t) &\sim \sum_1^{\infty} \left((-1)^n \frac{2}{n} \sin(nt) \right) = \underline{\underline{2 \cdot \sum_1^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{n} \sin(nt) \right)}} \\ &= \underline{\underline{2 \cdot \left(-\sin t + \frac{1}{2} \sin 2t - \frac{1}{3} \sin 3t + \frac{1}{4} \sin 4t - \dots \right)}} \end{aligned}$$