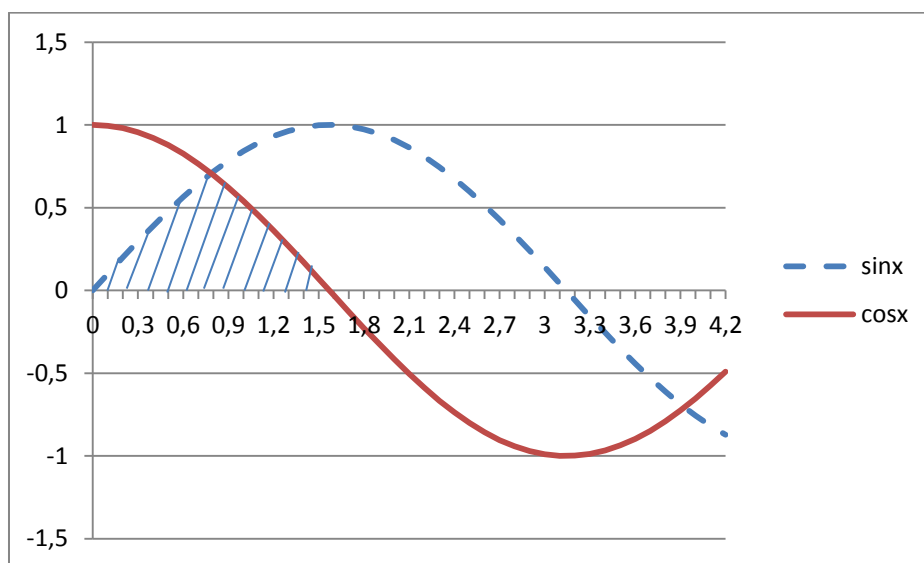


EKSAMEN – Løsningsforslag

18. juni 2014

Emnekode: ITD15013	Emne: Matematikk 1
Dato: 6. mai 2014	Eksamenstid: 09.00 – 12.00
Hjelpemidler: - To A4-ark med valgfritt innhold på begge sider. - Formelhefte. Kalkulator er ikke tillatt .	Faglærer: Christian F Heide
Eksamensoppgaven: Oppgavesettet består av fem sider inklusiv denne forsiden og to vedlegg. Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene. Oppgavesettet består av seks oppgaver med i alt 11 deloppgaver. Ved sensur vil alle deloppgaver telle omtrent like mye. Der det er mulig skal du: • vise utregninger og hvordan du kommer fram til svarene • begrunne dine svar, selv om dette ikke er eksplisitt sagt i hvert spørsmål	
Sensurdato: 28. mai 2014 Karakterene er tilgjengelige for studenter på studentweb senest 2 virkedager etter oppgitt sensurfrist. Følg instruksjoner gitt på: www.hiof.no/studentweb	

Oppgave 1



Figuren viser grafene til sinus og cosinus. Finn arealet av det skraverte området. (Grafene skjærer hverandre i punktet $x = \frac{\pi}{4}$).

Arealet av det skraverte feltet blir

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x \, dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx = [-\cos x]_0^{\frac{\pi}{4}} + [\sin x]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \\ &= -\cos \frac{\pi}{4} - (-\cos 0) + \sin \frac{\pi}{2} - \sin \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + 1 + 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} = \underline{\underline{2 - \sqrt{2}}} \end{aligned}$$

Oppgave 2

Løs følgende initialverdiproblem:

$$xy' - 2y = x^3 \quad y(1) = 6, \quad x > 0$$

Her må vi først ordne differensialligningen så den kommer på standard form. Dette gjør vi ved å dele hele ligningen med x slik at y' blir stående med koeffisient 1:

$$y' - \frac{2}{x}y = x^2$$

Så finner vi integrerende faktor ved først å integrere faktoren foran y :

$$\int -\frac{2}{x} dx = -2 \int \frac{1}{x} dx = -2 \ln|x|$$

Siden vi har fått oppgitt at $x > 0$ vil $|x| = x$ og vi kan skrive

$$-2 \ln|x| = -2 \ln x = \ln x^{-2}$$

Integrerende faktor (som ofte betegnes med den greske bokstaven ρ) blir da

$$\rho = e^{\ln x^{-2}} = x^{-2}$$

Vi ganger differensialligningen med den integrerende faktor og får

$$x^{-2} \cdot y' - x^{-2} \cdot 2x^{-1}y = x^{-2} \cdot x^2$$

$$x^{-2}y' - 2x^{-3}y = 1$$

som gir

$$(x^{-2}y)' = 1$$

Deretter integrerer vi begge sider:

$$\int (x^{-2}y)' dx = \int 1 dx$$

som gir

$$x^{-2}y = x + C$$

Så løser vi med hensyn på y ved å gange med x^2 og får

$$\underline{y = x^3 + Cx^2}$$

Til slutt må vi finne konstanten C ved å benytte initialbetingelsen $y(1) = 6$:

$$6 = 1^3 + C \cdot 1^2$$

som gir

$$C = 5$$

Løsningen på initialverdiproblemet blir følgelig

$$\underline{\underline{y = x^3 + 5x^2}}$$

Oppgave 3

a) Den laplacetransformerte til en funksjon $f(t)$ er gitt ved:

$$F(s) = \frac{1}{s-2} - \frac{1}{s+1}$$

Finn $f(t)$, altså den inverse laplacetransformasjonen til $F(s)$.

Siden både laplacetransformasjonen og den inverse laplacetransformasjonen er lineære, kan vi dele opp uttrykket over slik:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-2} - \frac{1}{s+1}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-2}\right) - \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+1}\right)$$

Av tabellen i vedlegg 2 framgår det at $\mathcal{L}(e^{at}) = \frac{1}{s-a}$. Dette innebærer at

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-2}\right) = e^{2t} \quad \text{og} \quad \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+1}\right) = e^{-t}$$

Følgelig er

$$\underline{\underline{f(t) = e^{2t} - e^{-t}}}$$

b) *Bruk laplacetransformasjon til å løse følgende initialverdiproblem:*

$$y'' - y' - 2y = 3\delta(t-2) \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 3$$

hvor $\delta(t-2)$ er en enhetspuls (Diracs delta) ved $t = 2$.

Vi laplacetransformerer differensialligningen og får:

$$s^2Y - s \cdot 0 - 3 - (sY - 0) - 2Y = 3e^{-2s}$$

som gir, når vi flytter alt på venstre side som ikke inneholder Y over på høyre side,

$$s^2Y - sY - 2Y = 3e^{-2s} + 3$$

Vi trekker Y ut som en felles faktor

$$(s^2 - s - 2)Y = 3e^{-2s} + 3$$

og løser så med hensyn på Y :

$$Y = \frac{3e^{-2s}}{s^2 - s - 2} + \frac{3}{s^2 - s - 2}$$

Vi må så se om vi kan delbrøkkoppspalte. Vi faktorerer først nevneren:

$$s^2 - s - 2 = 0$$

gir

$$s = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm 3}{2}$$

dvs.

$$s = \frac{1+3}{2} = 2 \quad \vee \quad s = \frac{1-3}{2} = -1$$

Vi kan følgelig faktorisere nevneren slik: $s^2 - s - 2 = (s - 2)(s + 1)$

Så gjør vi delbrøkoppspaltingen:

$$\frac{3}{s^2 - s - 2} = \frac{A}{s - 2} + \frac{B}{s + 1}$$

Ganger med $(s - 2)(s + 1)$ og får

$$3 = A(s + 1) + B(s - 2)$$

Setter vi så inn $s = 2$ i dette uttrykket får vi:

$$3 = A(2 + 1) + B(2 - 2)$$

dvs. $\underline{A = 1}$

Setter vi inn $s = -1$ får vi:

$$3 = A(-1 + 1) + B(-1 - 2)$$

dvs. $\underline{B = -1}$

Vi kan følgelig delbrøkoppspalte slik

$$\frac{3}{s^2 - s - 2} = \frac{1}{s - 2} - \frac{1}{s + 1}$$

Dette er det samme uttrykket som vi inverstransformerte i oppgave a).

Vi kan nå skrive uttrykket for Y som

$$Y = \frac{1}{s - 2} e^{-2s} - \frac{1}{s + 1} e^{-2s} + \frac{1}{s - 2} - \frac{1}{s + 1}$$

Vi bruker så resultatet fra oppgave a) sammen med følgende som vi henter fra tabellen i vedlegg 1:

$$\mathcal{L}(y(t - a) u(t - a)) = e^{-as} Y(s)$$

I vårt tilfelle betyr dette at

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-2}e^{-2s}\right) = e^{2(t-2)}u(t-2)$$

og

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+1}e^{-2s}\right) = e^{-(t-2)}u(t-2)$$

Dette gir oss følgende løsning på initialverdiproblemet:

$$\underline{\underline{y(t) = e^{2(t-2)}u(t-2) - e^{-(t-2)}u(t-2) + e^{2t} - e^{-t}}}$$

Dersom vi ønsker kan vi omforme løsningen slik:

For $t < 2$ (da er $u(t-2) = 0$):

$$y(t) = e^{2t} - e^{-t}$$

For $t \geq 2$ (da er $u(t-2) = 1$):

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{2(t-2)} \cdot 1 - e^{-(t-2)} \cdot 1 + e^{2t} - e^{-t} = \\ &= e^{2t}e^{-4} - e^{-t}e^2 + e^{2t} - e^{-t} = (1 + e^{-4})e^{2t} - (1 + e^2)e^{-t} \end{aligned}$$

Løsningen da skrives slik

$$y(t) = \begin{cases} e^{2t} - e^{-t} & t < 2 \\ (1 + e^{-4})e^{2t} - (1 + e^2)e^{-t} & t \geq 2 \end{cases}$$

Oppgave 4

Gitt følgende matrise:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -6 & -14 \\ 3 & -7 & 8 & -5 \\ 3 & -9 & 12 & 9 \end{bmatrix}$$

a) Finn alle løsninger av ligningssystemet $Ax = \mathbf{0}$.

Dette kan vi finne ved å gjøre elementære rekkeoperasjoner på koeffisientmatrisen inntil den er på redusert trappeform. Siden vi har et homogent ligningssystem trenger vi ikke å dra med oss høyresiden som jo alltid vil bestå av bare 0-er, og trenger derfor ikke å bruke totalmatrisen.

Vi bytter først om på rekke 1 og 3, og får:

$$\sim \begin{bmatrix} 3 & -9 & 12 & 9 \\ 3 & -7 & 8 & -5 \\ 0 & 3 & -6 & -14 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 3 & -9 & 12 & 9 \\ 0 & 2 & -4 & -14 \\ 0 & 3 & -6 & -14 \end{bmatrix} \quad R_2' = R_2 - R_1$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & -4 & -14 \\ 0 & 3 & -6 & -14 \end{bmatrix} \quad R_1' = \frac{1}{3} R_1$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -7 \\ 0 & 3 & -6 & -14 \end{bmatrix} \quad R_2' = \frac{1}{2} R_2$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \quad R_3' = R_3 - 3R_2$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad R_3' = \frac{1}{7} R_3$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} R_1' = R_1 - 3R_3 \\ R_2' = R_2 + 7R_3 \end{array}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad R_1' = R_1 + 3R_2$$

Nå er koeffisientmatrisen på redusert trappeform, og vi kan skrive ned løsningen. Av 3. rekke ser vi at

$$x_4 = 0$$

Variabelen x_3 er fri, og vi setter

$$x_3 = s$$

2. rekke gir da

$$x_2 - 2x_3 = 0$$

og følgelig

$$x_2 = 2x_3 = 2s$$

1. rekke gir

$$x_1 - 2x_3 = 0$$

og følgelig

$$x_1 = 2x_3 = 2s$$

Oppsummert:

$$\underline{\underline{x_1 = 2s, \quad x_2 = 2s, \quad x_3 = s, \quad x_4 = 0}}$$

Skrevet på vektorform:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2s \\ 2s \\ s \\ 0 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

b)

i) *Forklar hva som menes med at vektorer er lineært avhengige eller uavhengige.*

Vektorer er lineært avhengige dersom en av dem kan skrives som en lineærkombinasjon av de andre. I $\mathbb{R}^2$ innebærer dette at vektorene har samme eller motsatt retning (altså at de peker langs samme linje). I $\mathbb{R}^3$ innebærer det at vektorene ligger i samme plan. I motsatt fall er de lineært uavhengige.

ii) *Er kolonnevektorene i A lineært uavhengige? Begrunn svaret.*

Vektorene er ikke lineært uavhengige. Altså: de er lineært avhengige.

Dette kan begrunnes på to måter (som essensielt er den samme begrunnelsen):

1. Kolonnevektorene i A har tre komponenter og ligger derfor i $\mathbb{R}^3$. Fire vektorer som bor i et tredimensjonalt rom kan ikke være lineært uavhengige, da det er «en dimensjon for lite». Den siste vektoren har ikke noen ny dimensjon å peke ut. Følgelig er vektorene lineært avhengige.

2. Dersom kolonnevektorene i A er lineært uavhengige betyr det at lineærkombinasjonen av dem er nullvektor kun dersom alle koeffisientene i lineærkombinasjonen er null. En lineærkombinasjon av kolonnevektorene i A kan uttrykkes som $A\mathbf{x}$ hvor $\mathbf{x}$ er vektoren av koeffisientene i lineærkombinasjonen. Altså: dersom $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ kun har den trivielle løsningen er kolonnevektorene i A lineært uavhengige. Som vi så i oppgave a) hadde dette

ligningssystemet også ikke-trivielle løsninger, og vektorene er derfor lineært avhengige.

c) *Finn en basis for kolonnerommet og en basis for nullrommet til matrisen.*

Matrisen på redusert trappeform som vi fant i oppgave a) kan brukes til å finne en basis for kolonnerommet. Matrisen var slik:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Vi ser at kolonne 1, 2 og 4 har ledende elementer, og disse tre kolonnene i matrise A vil derfor danne en basis for kolonnerommet til A , altså:

$$\underline{\underline{\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -7 \\ -9 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -14 \\ -5 \\ 9 \end{bmatrix}}}$$

En basis for nullrommet til matrisen er gitt av løsningen på $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ som vi fant i a). På vektorform var denne løsningen

$$\mathbf{x} = s \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

og en basis for nullrommet er derfor

$$\underline{\underline{\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}}$$

d) *For matrise A , finn*

i) *dimensjonen til kolonnerommet*

Dimensjonen til kolonnerommet er gitt ved antall vektorer i basisen. Her består basisen av tre vektorer (dette fant vi i oppgave c), og dimensjonen til kolonnerommet er følgelig 3.

ii) *rangen*

Rangen til matrisen er lik dimensjonen til kolonnerommet. Følgelig er rank $A = 3$

iii) *nulliteten*

Nulliteten er dimensjonen til nullrommet. Vi så at basis for nullrommet besto av kun en vektor. Følgelig er nulliteten til A lik 1.

Oppgave 5

a) *Gitt følgende matrise.*

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Finn matrixens egenverdier og de tilhørende egenvektorsettene.

Egenverdiene og egenvektorene er de λ og $\mathbf{x}$ som tilfredsstiller ligningen $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ som kan omformes til $(A - \lambda I) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Vi finner først egenverdiene. Det er de som gir ikke-trivielle løsninger av ligningen $(A - \lambda I) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$, altså de λ som gjør determinanten til koeffisientmatrisen lik 0.

Determinanten til koeffisientmatrisen er

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 5 - \lambda & 4 \\ 1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = (5 - \lambda)(2 - \lambda) - 4 \cdot 1 =$$

$$= 10 - 5\lambda - 2\lambda + \lambda^2 - 4 = \lambda^2 - 7\lambda + 6$$

Vi finner så hvilke som gjør denne lik 0:

$$\lambda = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1} = \frac{7 \pm 5}{2}$$

som gir følgende egenverdier

$$\underline{\underline{\lambda_1}} = \frac{7+5}{2} = \underline{\underline{6}} \quad \text{og} \quad \underline{\underline{\lambda_2}} = \frac{7-5}{2} = \underline{\underline{1}}$$

Egenvektorene er de $\mathbf{x}$ -vektorene som er løsninger av ligningssystemet $(A - \lambda I) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$:

Egenvektorsettet som tilhører $\lambda_1 = 6$:

$$A - \lambda_1 I = \begin{bmatrix} 5 - \lambda_1 & 4 \\ 1 & 2 - \lambda_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 - 6 & 4 \\ 1 & 2 - 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$$

Løsningen av ligningssystemet $(A - \lambda I) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$ finner vi nå ved elementære rekkeoperasjoner på koeffisientmatrisen:

$$\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad R_2' = R_2 + R_1$$

Mange vil foretrekke å ha matrisen på redusert trappeform. I så fall må vi endre fortegn på første rekke (dette spiller strengt tatt ingen rolle):

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad R_1' = (-1)R_1$$

Her vil x_2 være en fri variabel, og vi setter

$$x_2 = s$$

Første rekke gir da

$$x_1 - 4x_2 = 0$$

som gir

$$x_1 = 4x_2 = 4s$$

Skrevet på vektorform blir løsningen, som er egenvektorsettet tilhørende $\lambda_1 = 6$:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 4s \\ s \end{bmatrix} = s \underline{\underline{\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}}}, \quad s \neq 0$$

Egenvektorsettet som tilhører $\lambda_2 = 1$:

$$A - \lambda_2 I = \begin{bmatrix} 5 - \lambda_2 & 4 \\ 1 & 2 - \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 - 1 & 4 \\ 1 & 2 - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Elementære rekkeoperasjoner på denne gir

$$\begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad R_1' = \frac{1}{4}R_1$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad R_2' = R_2 - R_1$$

Her vil x_2 være en fri variabel, og vi setter

$$x_2 = t$$

Første rekke gir da

$$x_1 + x_2 = 0$$

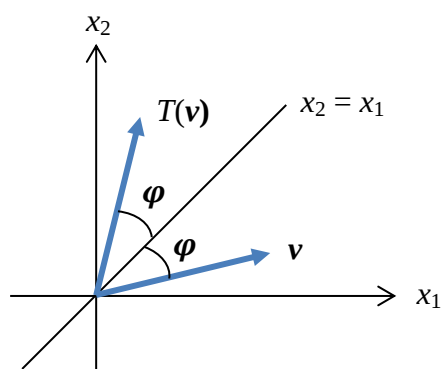
som gir

$$x_1 = -x_2 = -t$$

Skrevet på vektorform blir løsningen, som er egenvektorsettet tilhørende $\lambda_2 = 1$:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -t \\ t \end{bmatrix} = t \underline{\underline{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}}}, \quad t \neq 0$$

- b) En lineærtransformasjon $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ speiler vektorer om linjen $x_2 = x_1$ som figuren nedenfor viser. Hva er transformasjonens egenverdier og tilhørende egenvektorsett?



Det som er karakteristisk for egenvektorer, er at de etter transformasjonen fortsatt vil peke langs den samme linja, men at de kan bli strukket eller krympet. Dette kan uttrykkes som $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ hvor $\mathbf{x}$ er egenvektoren, A er transformasjonsmatrisen og λ uttrykker hvor mye vektoren blir strukket eller krympet ved transformasjonen.

En vektor som peker langs speilingslinjen vil ikke endre seg når den speiles om linjen. Alle slike vektorer er derfor egenvektorer til lineærtransformasjonen. En retningsvektor for speilingslinja er

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Dette egenvektorsettet kan derfor uttrykkes som

$$\underline{\underline{s \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad s \neq 0}}$$

Fordi disse vektorene hverken strekkes eller krympes ved speilingstransformasjonen må egenverdien som dette egenvektorsettet tilhører være $\lambda_1 = 1$.

Vektorer som står ortogonalt (vinkelrett) på speilingslinja vil også være egenvektorer til denne lineærtransformasjonen fordi de ved speiling vil bli snudd men vil fortsatt peke langs linja som er ortogonalt på speilingslinja. En retningsvektor for linja som er ortogonal på vår speilingslinje er

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Dette egenvektorsettet kan derfor uttrykkes som

$$\underline{\underline{t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad t \neq 0}}$$

Fordi disse vektorene snus motsatt vei men hverken strekkes eller krympes ved speilingstransformasjonen må egenverdien som dette egenvektorsettet tilhører, være $\lambda_2 = -1$.

Oppgave 6

Finn verdien av følgende uegentlige integral dersom det konvergerer:

$$\int_4^{\infty} \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} dx$$

$$\int_4^{\infty} \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} dx = \lim_{s \rightarrow \infty} \int_4^s \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} dx = \lim_{s \rightarrow \infty} \int_4^s x^{-\frac{3}{2}} dx = \lim_{s \rightarrow \infty} \left[-2x^{-\frac{3}{2}+1} \right]_4^s = -2 \lim_{s \rightarrow \infty} \left[x^{-\frac{1}{2}} \right]_4^s =$$

$$-2 \lim_{s \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{\sqrt{x}} \right]_4^s = -2 \lim_{s \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{s}} - \frac{1}{\sqrt{4}} \right) = -2 \left(0 - \frac{1}{2} \right) = \underline{\underline{1}}$$