

oppgave 1a)

$$y'' - 3y' - 4y = 0$$

$$\lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0$$

$$\lambda = -(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)}$$

$$= \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2}$$

$$= \frac{3 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2}$$

$$\lambda_1 = \frac{3+5}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

$$\lambda_2 = \frac{3-5}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

$$y = Ae^{\lambda_1 x} + Be^{\lambda_2 x}$$

$$= Ae^{4x} + Be^{-x}$$

$$\begin{array}{l} x \\ 1 \\ e \\ 4x \\ e \\ -x \\ e \\ y = \end{array}$$

$$y(0) = Ae^{4 \cdot 0} + Be^{-1 \cdot 0} = A + B = 0$$

$$A = -B$$

$$y' = 4Ae^{4x} - Be^{-x}$$

$$A = 1$$

$$y'(0) = 4Ae^{4 \cdot 0} - Be^{-1 \cdot 0} = 4A - B = 5$$

$$= -4B - B = 5$$

$$-5B = 5$$

$$B = -1$$

Oppgave 1b)

① To relevante størrelser:

T = temperatur

t = tiden i timer

$T(t)$

② Vet at forandringen i temperatur per tidsenhet er proporsjonal med temperaturforskjellen mellom kjølstykket og ovnen

$$\frac{dT}{dt} = k(60 - T)$$

$$\frac{dT}{dt} = 60k - kT$$

$$T' + kT = 60k$$

1) Inhomogen

2) 1. orden

3) Konstante koeff.

4) linear

③ Løser først homogen diff.lkn:

$$T' + kT = 0$$

$$\lambda + k = 0$$

$$\lambda = -k$$

$$T_h = Ae^{\lambda t} \\ = Ae^{-kt}$$

Løser inhomogen diff. lkn:

$$T_p = C$$

$$T_p' = 0$$

Setter inn i diff. lkn. og får:

$$T' + kT = 60k$$

$$0 + kC = 60k$$

$$C = \frac{60k}{k} = 60$$

$$T(t) = T_h + T_p = \underline{Ae^{-kt} + 60}$$

④ $T(0) = 20 \rightarrow$ startbetingelse

$$T(0) = Ae^{-k \cdot 0} + 60 = 20$$

$$A = 20 - 60 = -40$$

$$\underline{T(t) = -40e^{-kt} + 60}$$

Videre vet vi at: $T(4) = 40$

$$T(4) = -40e^{-4k} + 60 = 40$$

$$40e^{-4k} = 60 - 40$$

$$e^{-4k} = \frac{20}{40} = \frac{1}{2} = 0.5$$

$$\ln e^{-4k} = \ln(0.5)$$

$$-4k = \ln(0.5)$$

$$k = \frac{-\ln(0.5)}{4} = \frac{-\ln(1/2)}{4}$$

$$= \frac{-(\ln 1 - \ln 2)}{4} = \frac{-(0 - \ln 2)}{4} = \frac{\ln 2}{4}$$

$$\underline{T(t) = -40 e^{\frac{-\ln 2}{4} t} + 60}$$

- ⑤ Hvor lang tid tar det før kjøttstykket har en temperatur på 55°C ?

$$T(t) = -40 e^{\frac{-\ln 2}{4} t} + 60 = 55$$

$$40 e^{\frac{-\ln 2}{4} t} = 60 - 55$$

$$e^{\frac{-\ln 2}{4} t} = \frac{5}{40} = \frac{1}{8}$$

$$\begin{aligned} \ln e^{\frac{-\ln 2}{4} t} &= \ln(1/8) \\ &= \ln 1 - \ln 8 \\ &= -\ln 8 = -\ln 2^3 \end{aligned}$$

$$\frac{-\ln 2}{4} t = -\ln 2^3$$

$$\ln 2 t = 4 \cdot \ln 2^3$$

$$t = \frac{4 \cdot 3 \ln 2}{\ln 2}$$

$$= 12$$

∴ Det vil ta 12 timer

oppgave 2

a) $y = a_0 + a_1 x$

$$Y = \begin{bmatrix} 100 \\ 90 \\ 80 \\ 60 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \quad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix}$$

$$A^T A X = A^T Y$$

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 10 \\ 10 & 30 \end{bmatrix}$$

$$A^T Y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 100 \\ 90 \\ 80 \\ 60 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 330 \\ 760 \end{bmatrix}$$

$$A^T A X = A^T Y$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 10 \\ 10 & 30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 330 \\ 760 \end{bmatrix}$$

↓ totalmatrise

$$\left[\begin{array}{cc|c} 4 & 10 & 330 \\ 10 & 30 & 760 \end{array} \right] \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left[\begin{array}{cc|c} 10 & 30 & 760 \\ 4 & 10 & 330 \end{array} \right] \times \frac{1}{10}$$

$$= \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 76 \\ 4 & 10 & 330 \end{array} \right] \xrightarrow{\text{④}} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 76 \\ 0 & -2 & 26 \end{array} \right] \times \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$= \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 76 \\ 0 & 1 & -13 \end{array} \right] \xrightarrow{\text{③}} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 115 \\ 0 & 1 & -13 \end{array} \right]$$

$$y = 115 - 13x$$

+ skisse!

Oppgave 3a)

Vektorene danner en basis dersom

① de er lineært uavh.

② Utspenner $\mathbb{R}^2$

Metode for å sjekke om vektorene er lineært uavh.

$$\textcircled{1} \det \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \neq 0$$

$$3 \cdot 1 - (-1) \cdot 2 = 3 + 2 = 5 \quad \therefore \text{lineært uavh}$$

② Setter opp totalmatrisen til linearkomb.

$$k_1 u_1 + k_2 u_2 = 0$$

$$k_1 \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\downarrow$$
$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\downarrow$$
$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

Dersom vi kun får den triviale løsning $k_1 = k_2 = 0$
Så er u_1 og u_2 lineært uavh.

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{array} \right] \times \frac{1}{3} &= \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1/3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{array} \right] \begin{matrix} \textcircled{-2} \\ \uparrow \end{matrix} = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1/3 & 0 \\ 0 & 5/3 & 0 \end{array} \right] \times \left(\frac{3}{5} \right) \\ &= \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \begin{matrix} \uparrow \\ \textcircled{1/3} \end{matrix} = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \end{aligned}$$

$\therefore k_1 = k_2 = 0$ og vi har lineært uavh. 8

oppgave 3b

$$P = \begin{matrix} \begin{matrix} \text{FRA:} \\ \text{Spenst} & \text{Family} \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0,9 & 0,15 \\ 0,1 & 0,85 \end{bmatrix} & \begin{matrix} \text{TIL:} \\ \text{Spenst} \\ \text{Family} \end{matrix} \end{matrix}$$

oppgave 3c

$$X_0 = \begin{bmatrix} 0,8 \\ 0,2 \end{bmatrix}$$

oppgave 3d

Egenvektorsettet tilhørende $\lambda = 1$:

$$(P - \lambda I)x = 0$$

$$(P - 1I)x = 0$$

$$(P - I)x = 0 \rightarrow \begin{bmatrix} 0,9-1 & 0,15 \\ 0,1 & 0,85-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

↓

totalmatnse

$$\left[\begin{array}{cc|c} -0,1 & 0,15 & 0 \\ 0,1 & -0,15 & 0 \end{array} \right] \begin{matrix} \textcircled{1} \\ \leftarrow \end{matrix} = \left[\begin{array}{cc|c} -0,1 & 0,15 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \times (-10)$$

$$= \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$x_1 = \frac{3}{2} x_2$$

x_2 er en fni variabel. Setter $x_2 = a$

$$x_1 = \frac{3}{2} x_2 = \frac{3}{2} d$$

Egenvektorsettet tilhørende $\lambda = 1$:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2}d \\ d \end{bmatrix} = d \begin{bmatrix} 3/2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad d \neq 0$$

Velger $d=2$ og får egenvektoren $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$

Egenvektorsettet tilhørende $\lambda = 0,75$:

$$(P - \lambda I)x = 0$$

$$(P - 0,75I)x = 0 \rightarrow \begin{bmatrix} 0,9-0,75 & 0,15 \\ 0,1 & 0,85-0,75 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

↓ totalmatrise

$$\left[\begin{array}{cc|c} 0,15 & 0,15 & 0 \\ 0,1 & 0,1 & 0 \end{array} \right] \begin{matrix} \times 100 \\ \times 10 \end{matrix} = \left[\begin{array}{cc|c} 15 & 15 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \right] \times \left(\frac{1}{15} \right)$$

$$= \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \right] \begin{matrix} \textcircled{-1} \\ \swarrow \end{matrix} = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$x_1 = -x_2$$

x_2 er en fri variabel. setter $x_2 = B$ og får

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -B \\ B \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad B \neq 0$$

Velger $B=1$ og får egenvektoren $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

oppgave 3 e

Vi er gitt $x_0 \begin{bmatrix} 0,8 \\ 0,2 \end{bmatrix}$ og at $x_{k+1} = P x_k$

Videre har vi følgende egenverdier med tilhørende egenvektor

$$\lambda_1 = 1 \quad u_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \lambda_2 = 0,75 \quad u_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Siden u_1 og u_2 er lineært uavheng, så danner de en basis for $\mathbb{R}^2$

Vektoren x_0 (som er gitt mhp standardbasis) kan derfor uttrykkes ved u_1 og u_2 .

La U være koordinat-skiftematrisen fra basis $B = \{u_1, u_2\}$ til basis $S = \{e_1, e_2\}$

$$U = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} x_S &= U x_B \\ x_B &= U^{-1} x_S \end{aligned}$$

$$U^{-1} = \frac{1}{(3 \cdot 1) - (-1 \cdot 2)} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$x_B = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,8 \\ 0,2 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,2 \\ -0,2 \end{bmatrix}$$

Siden u_1 og u_2 er egenvektorer til P har vi at

$$Pu_1 = \lambda_1 u_1 = u_1 \quad Pu_2 = \lambda_2 u_2 = 0,75 u_2$$

$$\begin{aligned} x_1 &= Px_0 \\ &= P(0,2 u_1 - 0,2 u_2) \\ &= 0,2 Pu_1 - 0,2 Pu_2 \\ &= 0,2 u_1 - 0,2 \cdot 0,75 u_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2 &= Px_1 \\ &= P(0,2 u_1 - 0,2 \cdot 0,75 u_2) \\ &= 0,2 Pu_1 - 0,2 \cdot 0,75 Pu_2 \\ &= 0,2 u_1 - 0,2 \cdot 0,75 \cdot 0,75 u_2 \\ &= 0,2 u_1 - 0,2 \cdot (0,75)^2 u_2 \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_k &= Px_{k-1} \\ &= 0,2 u_1 - 0,2 \cdot (0,75)^k u_2 \end{aligned}$$

lar $k \rightarrow \infty$ og ser at $(0,75)^k \rightarrow 0$

$$x_k = 0,2 u_1 = 0,2 \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,6 \\ 0,4 \end{bmatrix}$$

∴ I det lange løp vil 60% av kundene være på spenst og 40% på family.

oppgave 4 a

$$f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$f(\pi) = \frac{\sin \pi}{\cos \pi} = \frac{0}{-1} = 0$$

$$f'(x) = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$f'(\pi) = \frac{1}{(\cos \pi)^2} = \frac{1}{(-1)^2} = 1$$

$$f''(x) = \frac{0 \cdot \cos^2 x - 1 \cdot 2 \cos x \cdot (-\sin x)}{\cos^4 x}$$

$$= \frac{2 \cos x \sin x}{\cos^4 x} = \frac{2 \sin x}{\cos^3 x}$$

$$f''(\pi) = \frac{2 \sin \pi}{(\cos \pi)^3}$$

$$= \frac{2 \cdot 0}{(-1)^3} = 0$$

$$f'''(x) = \frac{2 \cos x \cdot \cos^3 x - 2 \sin x \cdot 3 \cos^2 x \cdot (-\sin x)}{\cos^6 x}$$

$$= \frac{2 \cos^4 x + 6 \sin^2 x \cos^2 x}{\cos^6 x} = \frac{\cos^2 x (2 \cos^2 x + 6 \sin^2 x)}{\cos^6 x}$$

$$= \frac{2 \cos^2 x + 6 \sin^2 x}{\cos^4 x}$$

$$f'''(\pi) = \frac{2 (\cos \pi)^2 + 6 \cdot 0}{(\cos \pi)^4}$$

$$= \frac{2 \cdot 1}{1} = 2$$

$$P_3(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3$$

$$= f(\pi) + f'(\pi)(x-\pi) + \frac{f''(\pi)}{2!}(x-\pi)^2 + \frac{f'''(\pi)}{3!}(x-\pi)^3$$

$$= 0 + 1(x-\pi) + \frac{0}{2!}(x-\pi)^2 + \frac{2}{3!}(x-\pi)^3$$

$$= \underline{\underline{(x-\pi) + \frac{1}{3}(x-\pi)^3}}$$

oppg 4 b)

$$a + ak + ak^2 + ak^3 + ak^4 + \dots$$

↑

1. ledd

$$ak = 1$$

$$ak^3 = \frac{1}{4}$$

$$\frac{ak^3}{ak} = \frac{\frac{1}{4}}{1} = \frac{1}{4}$$

$$k^2 = \frac{1}{4}$$

$$k = \pm \sqrt{\frac{1}{4}} = \pm \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{4}} = \pm \frac{1}{2}$$

$$= -\frac{1}{2}$$

siden vi har både positive og negative ledd

$$ak = 1$$

$$a = \frac{1}{k} = \frac{1}{-\frac{1}{2}} = -2$$

∴ Vi har en geometrisk rekke med $a = -2$ og $k = -\frac{1}{2}$

$$-2 + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots$$

Rekkens sum blir:

$$S = \frac{a}{1-k} = \frac{-2}{1-(-\frac{1}{2})} = \frac{-2}{\frac{3}{2}} = -\frac{4}{\underline{\underline{3}}}$$