



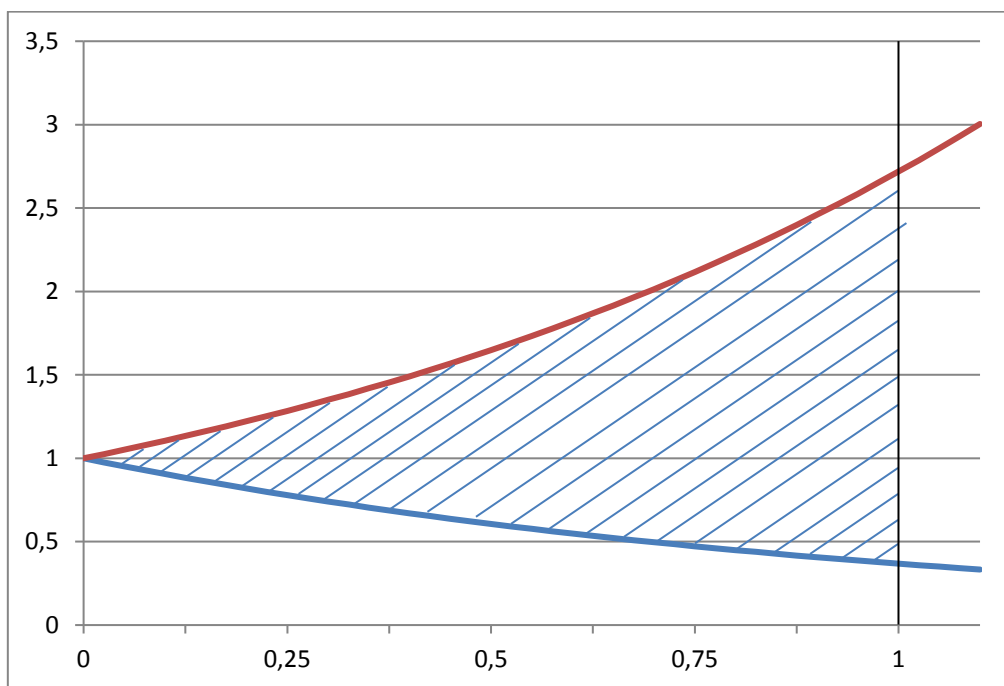
EKSAMEN – Ny og utsatt

Løsningsforslag

Emnekode: ITD15013	Emne: Matematikk 1 – andre deleksamen
Dato: 6. januar 2015	Eksamenstid: 09.00 – 12.00
Hjelpemidler: - To A4-ark med valgfritt innhold på begge sider. - Formelhefte. Kalkulator er ikke tillatt .	Faglærer: Christian F Heide
Eksamensoppgaven: Oppgavesettet består av 6 sider inklusiv denne forsiden og to vedlegg. Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene. Oppgavesettet består av 9 oppgaver med i alt 12 deloppgaver. Ved sensur vil alle deloppgaver telle like mye. Der det er mulig skal du: • vise utregninger og hvordan du kommer fram til svarene • begrunne dine svar, selv om dette ikke er eksplisitt sagt i hvert spørsmål	
Sensurdato: 27. januar 2015	
Karakterene er tilgjengelige for studenter på studentweb senest 2 virkedager etter oppgitt sensurfrist. Følg instruksjoner gitt på: www.hiof.no/studentweb	

Oppgave 1

Figuren viser funksjonene e^{-x} (blå kurve) og e^x (rød kurve).



Finn arealet av området som ligger mellom disse kurvene og er avgrenset av de vertikale linjene $x = 0$ og $x = 1$ (altså det skraverte området på figuren).

Arealet finner vi av følgende integral:

$$\begin{aligned}\int_0^1 (e^x - e^{-x}) dx &= \int_0^1 e^x dx - \int_0^1 e^{-x} dx = [e^x]_0^1 + [e^{-x}]_0^1 = \\ &= (e^1 - e^0) + (e^{-1} - e^{-0}) = e - 1 + \frac{1}{e} - 1 = e + \frac{1}{e} - 2 \approx 1.09\end{aligned}$$

Oppgave 2

Finn verdien av følgende uegentlige integral dersom det konvergerer: $\int_0^{\infty} e^{-2x} dx$

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} e^{-2x} dx &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t e^{-2x} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{2} e^{-2x} \right]_0^t = \\ &= -\frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow \infty} (e^{-2t} - e^0) = -\frac{1}{2} (0 - 1) = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Oppgave 3

Finn den generelle (allmenne) løsningen av følgende differensialligning:

$$y' - 3x^2 e^{-y} = 0$$

Vi forsøker å separere ligningen:

$$y' = 3x^2 e^{-y} \quad | \cdot e^y$$

$$e^y \frac{dy}{dx} = 3x^2$$

Ligningen er nå separert og vi kan integrere begge sider med hensyn på x :

$$\int e^y \frac{dy}{dx} dx = \int 3x^2 dx$$

$$\int e^y dy = \int 3x^2 dx$$

$$e^y = x^3 + C$$

Vi løser så med hensyn på y ved å ta logaritmen:

$$\underline{\underline{y = \ln(x^3 + C)}}$$

Oppgave 4

Finn løsningen på følgende initialverdiproblem:

$$y'' + 2y' + 2y = 3x^2 - 2x, \quad y(0) = 16, \quad y'(0) = -12$$

Vi løser først den tilhørende homogene ligningen:

$$y'' + 2y' + 2y = 0$$

Denne gir opphav til følgende karakteristiske ligning:

$$\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$$

som har følgende løsninger:

$$\lambda = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 8}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{-2 \pm 2i}{2} =$$

$$-1 \pm i$$

Dvs:

$$\lambda_1 = -1 + i \text{ og } \lambda_2 = -1 - i$$

Løsningen av den tilhørende homogene ligningen er følgelig

$$\underline{y_h = e^{-x} (C_1 \cos x + C_2 \sin x)}$$

Vi må så finne en partikulær løsning av den inhomogene ligningen. Høyre side er et annengradspolynom, så da må vi forsøke med et generelt annengradspolynom:

$$y = K_2 x^2 + K_1 x + K_0$$

som når vi deriverer, gir

$$y' = 2K_2 x + K_1$$

og

$$y'' = 2K_2$$

Setter vi så dette inn i diff.ligningen får vi

$$2K_2 + 2 \cdot (2K_2 x + K_1) + 2 \cdot (K_2 x^2 + K_1 x + K_0) = 3x^2 - 2x$$

Ganger vi ut og løser opp parentesene, får vi:

$$2K_2 + 4K_2 x + 2K_1 + 2K_2 x^2 + 2K_1 x + 2K_0 = 3x^2 - 2x$$

Vi sammenligner så faktorene foran ledd av samme grad. Faktorene foran annengradsleddene gir:

$$2K_2 = 3$$

altså

$$K_2 = \frac{3}{2}$$

Faktorene foran førstegradsleddene gir:

$$4K_2 + 2K_1 = -2$$

Setter vi så inn at $K_2 = \frac{3}{2}$ får vi

$$2K_1 = -2 - 4K_2 = -2 - 4 \cdot \frac{3}{2} = -2 - 6 = -8$$

altså

$$K_1 = -4$$

Konstantleddene gir:

$$2K_2 + 2K_1 + 2K_0 = 0$$

dvs.

$$K_0 = -K_2 - K_1 = -\frac{3}{2} - (-4) = \frac{5}{2}$$

Vi har da funnet følgende partikulærløsning:

$$\underline{y_p = \frac{3}{2}x^2 - 4x + \frac{5}{2}}$$

Den generelle løsningen av differensialligningen er følgende

$$\underline{y = y_h + y_p = e^{-x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) + \frac{3}{2}x^2 - 4x + \frac{5}{2}}$$

Vi må til slutt bestemme konstantene C_1 og C_2 basert på initialbetingelsene:

$y(0) = 16$ gir

$$e^{-0}(C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0) + \frac{3}{2} \cdot 0^2 - 4 \cdot 0 + \frac{5}{2} = 16$$

Her må vi bruke at $e^{-0} = 1$, $\cos 0 = 1$ og $\sin 0 = 0$ og får da:

$$C_1 + \frac{5}{2} = 16$$

dvs.

$$C_1 = 16 - \frac{5}{2} = \frac{27}{2}$$

Løsningen så langt blir

$$y = e^{-x}(\frac{27}{2} \cos x + C_2 \sin x) + \frac{3}{2}x^2 - 4x + \frac{5}{2}$$

For å bruke den andre initialbetingelsen må vi derivere dette uttrykket:

$$y' = (-e^{-x}) \cdot (\frac{27}{2} \cos x + C_2 \sin x) + e^{-x}(-\frac{27}{2} \sin x + C_2 \cos x) + 3x - 4$$

Setter vi så inn $y'(0) = -12$ inn i denne, får vi

$$(-e^{-0}) \cdot (\frac{27}{2} \cos 0 + C_2 \sin 0) + e^{-0}(-\frac{27}{2} \sin 0 + C_2 \cos 0) + 3 \cdot 0 - 4$$

som gir

$$-\frac{27}{2} + C_2 - 4 = -12$$

og følgelig

$$C_2 = -12 + 4 + \frac{27}{2} = \frac{11}{2}$$

Løsningen av initialverdiproblemet blir følgelig

$$\underline{\underline{y = e^{-x}(\frac{27}{2} \cos x + \frac{11}{2} \sin x) + \frac{3}{2}x^2 - 4x + \frac{5}{2}}}$$

Oppgave 5

a) En lineærtransformasjon $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ er gitt ved

$$T = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$$

Finn bildet av vektoren $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ under T .

Dette er gitt ved

$$\begin{aligned} T \cdot \mathbf{v} &= \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 2 \cdot (-1) + (-5) \cdot 2 \\ 1 \cdot (-1) + (-4) \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 - 10 \\ -1 - 8 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} -12 \\ -9 \end{bmatrix}}} \end{aligned}$$

b) Noen vektorer har den egenskap at de ikke endrer retning ved en transformasjon med lineærtransformasjonen T . Finn disse vektorene.

Disse vektorene som ikke endrer retning ved lineærtransformasjonen, kalles egenvektorene til transformasjonen, og er det samme som egenvektorene til matrisen T . Vi finner disse ved først å finne matrisens egenverdier. Egenverdiene er de λ som er løsninger av ligningen $\det(T - \lambda I) = 0$:

$$\det(T - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & -5 \\ 1 & -4 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

som gir

$$(2 - \lambda)(-4 - \lambda) - (-5) \cdot 1 = 0$$

som når vi ganger ut parentesene gir

$$-8 - 2\lambda + 4\lambda + \lambda^2 + 5 = 0$$

og altså

$$\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0$$

Egenverdiene er derfor følgende

$$\lambda = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2}$$

dvs.

$$\lambda_1 = \frac{-2+4}{2} = \frac{2}{2} = 1 \text{ og } \lambda_2 = \frac{-2-4}{2} = \frac{-6}{2} = -3$$

Egenvektorene som vi er ute etter å finne, er de $\mathbf{x}$ -vektorer som er ikke-trivielle løsninger av ligningssystemene

$$(T - \lambda_1 I) \cdot \mathbf{x} = 0 \text{ og } (T - \lambda_2 I) \cdot \mathbf{x} = 0$$

Egenvektorsettet tilhørende $\lambda_1 = 1$:

Koeffisientmatrisen til det første ligningssystemet er

$$(T - \lambda_1 I) = \begin{bmatrix} 2-1 & -5 \\ 1 & -4-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}$$

Løsningen av ligningssystemet $(T - \lambda_1 I) \cdot \mathbf{x} = 0$ finner vi nå ved elementære rekkeoperasjoner på denne koeffisientmatrisen:

$$\begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 1 & -5 \end{bmatrix} \\ \sim \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad R'_2 = R_2 - R_1$$

Her vil da x_2 kunne være en fri variabel, og vi setter

$$x_2 = s$$

Første rekke gir da følgende ligning:

$$x_1 - 5x_2 = 0$$

som gir

$$x_1 = 5x_2 = 5s$$

Skrevet på vektorform blir denne løsningen:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 5s \\ s \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad s \neq 0$$

Egenvektorsettet tilhørende $\lambda_2 = -3$:

Koeffisientmatrisen til det andre ligningssystemet er

$$(T - \lambda_2 I) = \begin{bmatrix} 2-(-3) & -5 \\ 1 & -4-(-3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Løsningen av ligningssystemet $(T - \lambda_2 I) \cdot \mathbf{x} = 0$ finner vi nå ved elementære rekkeoperasjoner på denne koeffisientmatrisen:

$$\begin{bmatrix} 5 & -5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -5 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} R_1' = R_2 \\ R_2' = R_1 \end{array}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad R_2' = R_2 - 5R_1$$

Vi setter x_2 som fri variabel:

$$x_2 = t$$

Første rekke gir da følgende ligning:

$$x_1 - x_2 = 0$$

som gir

$$x_1 = x_2 = t$$

Skrevet på vektorform blir denne løsningen:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} t \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad t \neq 0$$

De søkte vektorene som ikke endrer retning under transformasjonen T er altså egenvektorene

$$\underline{\underline{\chi_1 = s \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}}} \quad \text{og} \quad \underline{\underline{\chi_2 = t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}} \quad \text{for alle verdier av } s \text{ og } t \text{ forskjellig fra } 0.$$

Oppgave 6

Gitt følgende matrise:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 7 & 3 & 9 \\ 1 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

a) Vis ved elementære rekkeoperasjoner at den reduserte trappeformen til denne matrisen er

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

og finn så alle løsninger $\mathbf{x}$ av ligningssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, hvor

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \text{ og } \mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Vi gjør gausseliminasjon på koeffisientmatrisen ved hjelp av elementære rekkeoperasjoner:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 7 & 3 & 9 \\ 1 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} R_2' = R_2 - 2R_1 \\ R_3' = R_3 - R_1 \\ R_4' = R_4 - R_1 \end{array}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} R_3' = R_3 - 2R_2 \\ R_4' = R_4 + R_2 \end{array}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad R_4' = R_4 + R_3$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad R_3' = -\frac{1}{5}R_3$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} R_1' = R_1 - 4R_3 \\ R_2' = R_2 - R_3 \end{array}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad R_1' = R_1 - 3R_2$$

som er lik den i oppgaven oppgitte matrisen.

Så til løsningen av ligningssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$:

4. rekke i matrisen gir ingen informasjon.

3. rekke i matrisen representerer ligningen $x_4 = 0$.

Av 2. rekke ser vi at x_3 kan velges som fri variabel, og vi setter derfor $x_3 = s$.

Videre har vi fra 2. rekke: $x_2 + x_3 = 0$ som gir $x_2 = -x_3 = -s$.

1. rekke gir: $x_1 - 2x_3 = 0$ dvs: $x_1 = 2x_3 = 2s$.

Oppsummert:

$$\underline{\underline{x_1 = 2s, \quad x_2 = -s, \quad x_3 = s, \quad x_4 = 0}}$$

Løsningen skrevet på vektorform:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2s \\ -s \\ s \\ 0 \end{bmatrix} = s \cdot \underline{\underline{\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}}$$

b) Finn en basis for rekkerommet og en basis for nullrommet til matrisen.

Dette kan se direkte av matrisen på redusert trappeform som vi fant i spørsmål a):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Her ser vi at rekke som ikke er lik $\mathbf{0}^T$ vil være en basisvektor for rekkerommet til A . Her er dette rekke 1, 2 og 3, og en basis for **rekkerommet** vil følgelig være disse:

$$\underline{\underline{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}}$$

Basis for nullrommet til A får vi direkte fra løsningen av ligningssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Vi fant at løsningen er

$$\mathbf{x} = s \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

En basis for **nullrommet** er derfor

$$\underline{\underline{\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}}$$

c) For matrise A , finn

i) rangen

Rangen er lik dimensjonen til rekkerommet, altså 3.

ii) dimensjonen til kolonnerommet

Dimensjonen til kolonnerommet er lik dimensjonen til rekkerommet, altså 3.

iii) nulliteten

Nulliteten er dimensjonen til nullrommet. Som vi så i spørsmål b) er dette 1.

Vi kan også finne nulliteten ved hjelp av det såkalte rangteoremet som sier at rangen pluss nulliteten til en matrise er lik antall kolonner i matrisen. Siden antall kolonner er 4 og rangen er 3, må nulliteten da være 1.

Oppgave 7

En ball slippes fra to meters høyde mot et gulv. Ballen spretter opp til en høyde som er $\frac{3}{4}$ av høyden den slippes fra, før den igjen faller mot gulvet og spretter på ny opp til $\frac{3}{4}$ av høyden den faller fra, osv.

Finn den totale vertikale distansen ballen tilbakelegger før den ligger i ro på gulvet.

(Vi ser bort fra fysiske begrensninger som for eksempel luftmotstand og det litt problematiske i at ballen matematisk sett spretter uendelig mange ganger før den ligger i ro i forhold til gulvet.)

Ballen faller først 2 m.

Deretter spretter den opp $\frac{3}{4} \cdot 2$ m, og faller denne distansen ned til bakken igjen, totalt

$$2 \cdot \frac{3}{4} \cdot 2 \text{ m.}$$

Så spretter den opp $\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot 2 = \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot 2$ m og faller ned den samme distansen, totalt

$$2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot 2 \text{ m.}$$

Den totale distansen blir derfor

$$2 + 2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^1 \cdot 2 + 2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot 2 + 2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3 \cdot 2 + \dots + 2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n \cdot 2 + \dots =$$

$$2 + 4 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^1 + 4 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 + 4 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3 + \dots + 4 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n + \dots =$$

Dersom ser bort fra det første leddet, ser vi at dette er en geometrisk rekke med $a = 4 \cdot \frac{3}{4} = 3$

og $k = \frac{3}{4}$. Summen av en geometrisk rekke er

$$S = \frac{a}{1-k}$$

Her blir summen av denne rekken

$$S = \frac{3}{1 - \frac{3}{4}} = \frac{3}{\frac{1}{4}} = \frac{3 \cdot 4}{\frac{1}{4} \cdot 4} = 12$$

Total vertikal distanse blir følgelig

$$12 + 2 = \underline{\underline{14 \text{ m.}}}$$

Oppgave 8

Finn taylorpolynomet av grad 3 om $a = 0$ for funksjonen

$$f(x) = \sqrt{1-x}$$

Generelt er taylorpolynomet av grad 3 om punktet $x = a$ gitt ved

$$P_3(x) = f(a) + f'(a) \cdot (x-a) + \frac{f''(a)}{2!} (x-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!} (x-a)^3$$

Omkring $a = 0$ blir denne forenklet til

$$P_3(x) = f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{f''(0)}{2!} \cdot x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!} \cdot x^3$$

Vi må finne disse leddene. Vi finner:

$$f(0) = \sqrt{1-0} = \sqrt{1} = 1$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}(1-x)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-1) = -\frac{1}{2}(1-x)^{-\frac{1}{2}}$$

$$f'(0) = -\frac{1}{2}(1-0)^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)(1-x)^{-\frac{1}{2}-1} \cdot (-1) = \frac{1}{4}(1-x)^{-\frac{3}{2}}$$

$$f''(0) = \frac{1}{4}(1-0)^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{4}$$

$$f^{(3)}(x) = \frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)(1-x)^{-\frac{3}{2}-1} \cdot (-1) = -\frac{3}{8}(1-x)^{-\frac{5}{2}}$$

$$f^{(3)}(0) = -\frac{3}{8}(1-0)^{-\frac{5}{2}} = -\frac{3}{8}$$

Det søkte Taylorpolynomiet blir derfor

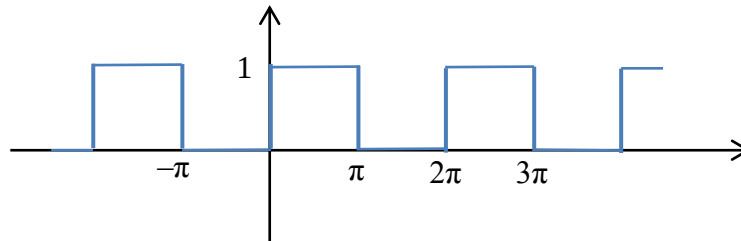
$$P_3(x) = 1 - \frac{1}{2} \cdot x + \frac{\frac{1}{4}}{2!} \cdot x^2 + \frac{-\frac{3}{8}}{3!} \cdot x^3 =$$

$$\underline{\underline{1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{16}}}$$

Oppgave 9

Tegn grafen og finn deretter fourierrekken til følgende periodiske funksjon med periode 2π :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi \leq x < 0 \\ 1 & 0 \leq x < \pi \end{cases}$$



Når perioden er 2π vil parameteren L som inngår i fourierintegralene og som er lik halve perioden, være $L = \frac{2\pi}{2} = \pi$.

Vi må så regne ut fourierkoeffisientene:

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx = \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^0 0 dx + \int_0^{\pi} 1 dx \right)$$

Her har jeg delt opp integralet i to deler siden funksjonen har delt forskrift og er 0 i den første halvperioden (mellom $-\pi$ og 0) og 1 i den andre halvperioden (mellom 0 og π).

Integralet av 0 er alltid 0, uansett integrasjonsgrenser.

Vi får derfor:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} 1 dx = \frac{1}{\pi} [x]_0^{\pi} = \frac{1}{\pi} \cdot (\pi - 0) = 1$$

Videre har må vi regne ut faktorene foran cosinus-leddene. Igjen kan vi nøye oss med å integrere mellom 0 og π siden funksjonen er 0 mellom $-\pi$ og 0:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} 1 \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{\pi} x\right) dx = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(nx) dx = \frac{1}{n\pi} [\sin(nx)]_0^{\pi} = \frac{1}{n\pi} (\sin(n\pi) - \sin 0) = \\ &= \frac{1}{n\pi} \sin(n\pi) = 0 \end{aligned}$$

Den siste likheten får vi fordi $\sin(n\pi) = 0$ uansett hva n er. Alle a_n er altså 0, og vi får derfor ingen cosinus-ledd i fourierrekken.

Vi må så regne ut faktorene foran sinus-leddene:

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin(nx) dx = \\
&= -\frac{1}{n\pi} [\cos(nx)]_0^\pi = -\frac{1}{n\pi} (\cos(n\pi) - \cos 0) = \\
&= -\frac{1}{n\pi} (\cos(n\pi) - 1) = \\
&= -\frac{1}{n\pi} ((-1)^n - 1) = \frac{1}{n\pi} (1 - (-1)^n)
\end{aligned}$$

Den nest siste overgangen kan vi gjøre fordi $\cos(n\pi)$ er 1 når n er et partall og -1 når n er et oddetall (for eksempel er $\cos \pi = -1$ og $\cos 2\pi = 1$). Husk også at n begynner på 1 og ikke på 0, slik at det er uproblematisk å ha n i nevneren.

Dette gir

$$\begin{aligned}
b_1 &= \frac{1}{\pi} (1 - (-1)^1) = \frac{1}{\pi} (1 + 1) = \frac{2}{\pi} \\
b_2 &= \frac{1}{2\pi} (1 - (-1)^2) = \frac{1}{2\pi} (1 - 1) = 0 \\
b_3 &= \frac{1}{3\pi} (1 - (-1)^3) = \frac{1}{3\pi} (1 + 1) = \frac{2}{3\pi} \\
b_4 &= \frac{1}{4\pi} (1 - (-1)^4) = \frac{1}{4\pi} (1 - 1) = 0 \\
b_5 &= \frac{1}{5\pi} (1 - (-1)^5) = \frac{1}{5\pi} (1 + 1) = \frac{2}{5\pi}
\end{aligned}$$

Fourierrekken til denne funksjonen blir følgende

$$\begin{aligned}
f(x) &\sim \frac{1}{2} a_0 + \sum_1^\infty b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) = \\
&= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sin x + \frac{2}{3\pi} \sin(3x) + \frac{2}{5\pi} \sin(5x) + \dots + \frac{2 \cdot (1 - (-1)^n)}{n\pi} \cdot \sin(nx) + \dots = \\
&= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left(\sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \dots + \frac{1}{n} \sin nx + \dots \right) = \\
&= \underline{\underline{\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^\infty \frac{1 - (-1)^n}{n} \sin(nx)}}
\end{aligned}$$

$$\underline{\underline{\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} \sin((2k-1)x)}}$$

Det er valgfritt om vi skriver svaret som det nest siste eller siste uttrykket. I det siste uttrykket bruker vi k istedenfor n for å få et enklere uttrykk.