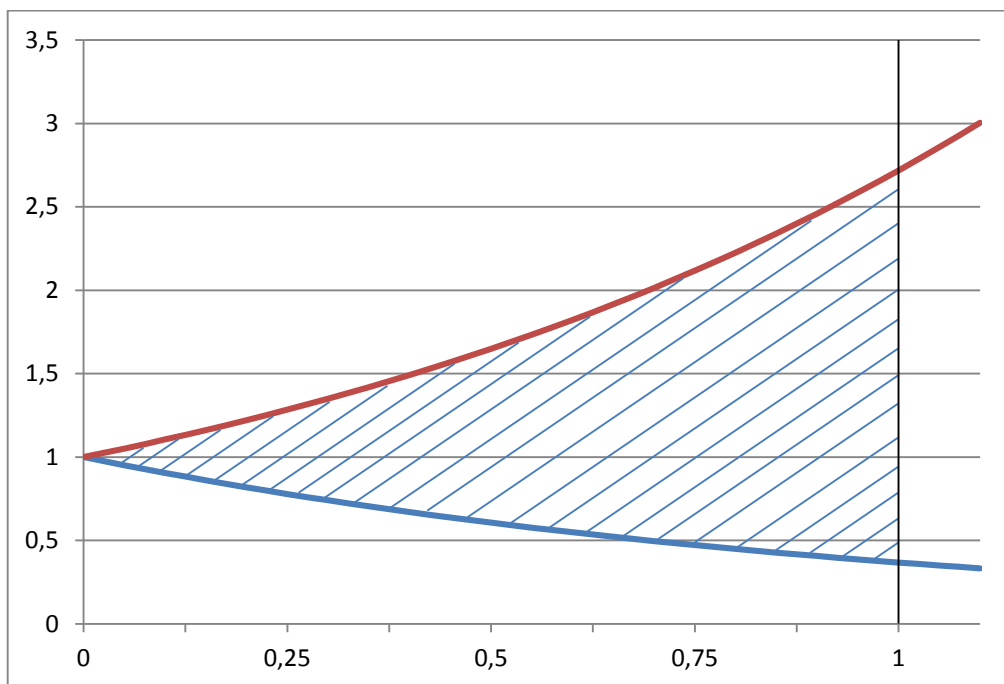


EKSAMEN – Ny og utsatt

Emnekode: ITD15013	Emne: Matematikk 1 – andre deleksamen
Dato: 6. januar 2015	Eksamenstid: 09.00 – 12.00
Hjelpemidler: - To A4-ark med valgfritt innhold på begge sider. - Formelhefte. Kalkulator er ikke tillatt .	Faglærer: Christian F Heide
Eksamensoppgaven: Oppgavesettet består av 6 sider inklusiv denne forsiden og to vedlegg. Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene. Oppgavesettet består av 9 oppgaver med i alt 12 deloppgaver. Ved sensur vil alle deloppgaver telle like mye. Der det er mulig skal du: • vise utregninger og hvordan du kommer fram til svarene • begrunne dine svar, selv om dette ikke er eksplisitt sagt i hvert spørsmål	
Sensurdato: 27. januar 2015 Karakterene er tilgjengelige for studenter på studentweb senest 2 virkedager etter oppgitt sensurfrist. Følg instruksjoner gitt på: www.hiof.no/studentweb	

Oppgave 1

Figuren under viser funksjonene e^{-x} (blå kurve) og e^x (rød kurve).



Finn arealet av området som ligger mellom disse kurvene og er avgrenset av de vertikale linjene $x = 0$ og $x = 1$ (altså det skraverte området på figuren).

Oppgave 2

Finn verdien av følgende uegentlige integral dersom det konvergerer:

$$\int_0^{\infty} e^{-2x}$$

Oppgave 3

Finn den generelle (allmenne) løsningen av følgende differensialligning:

$$y' - 3x^2 e^{-y} = 0$$

Oppgave 4

Finn løsningen på følgende initialverdiproblem:

$$y'' + 2y' + 2y = 3x^2 - 2x, \quad y(0) = 16, \quad y'(0) = -12$$

Oppgave 5

- a) En lineærtransformasjon $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ er gitt ved

$$T = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$$

Finn bildet av vektoren $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ under T .

- b) Noen vektorer har den egenskap at de ikke endrer retning ved en transformasjon med lineærtransformasjonen T . Finn disse vektorene.

Oppgave 6

Gitt følgende matrise:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 7 & 3 & 9 \\ 1 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

- a) Vis ved elementære rekkeoperasjoner at den reduserte trappeformen til denne matrisen er

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

og finn så alle løsninger $\mathbf{x}$ av ligningssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, hvor

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \text{ og } \mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

- b) Finn en basis for rekke rommet og en basis for nullrommet til matrisen.
- c) For matrise A , finn
- i) rangen
 - ii) dimensjonen til kolonnerommet
 - iii) nulliteten

Oppgave 7

En ball slippes fra to meters høyde mot et gulv. Ballen spretter opp til en høyde som er $\frac{3}{4}$ av høyden den slippes fra, før den igjen faller mot gulvet og spretter på ny opp til $\frac{3}{4}$ av høyden den faller fra, osv.

Finn den totale vertikale distansen ballen tilbakelegger før den ligger i ro på gulvet.

(Vi ser bort fra fysiske begrensninger som for eksempel luftmotstand og det litt problematiske i at ballen matematisk sett spretter uendelig mange ganger før den ligger i ro i forhold til gulvet.)

Oppgave 8

Finn taylorpolynomet av grad 3 om $a = 0$ for funksjonen

$$f(x) = \sqrt{1-x}$$

Oppgave 9

Tegn grafen og finn deretter fourierrekken til følgende periodiske funksjon med periode 2π :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi \leq x < 0 \\ 1 & 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

Vedlegg 1: Laplacetransformasjonen – formelliste

Definisjon av laplacetransformasjonen:

$$Y(s) = \mathcal{L}(y(t)) = \int_0^{\infty} y(t) e^{-st} dt$$

$y(t)$	$Y(s) = \mathcal{L}(y(t))$	Konvergensområde/ kommentar
1	$\frac{1}{s}$	$s > 0$
$t^n \quad (n=1, 2, 3, \dots)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$s > 0$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	$s > a$
$t^n e^{at} \quad (n=1, 2, 3, \dots)$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$	$s > a$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$	$s > 0$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$	$s > 0$
$e^{at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s-a)^2 + \omega^2}$	$s > a$
$y(t) e^{at}$	$Y(s-a)$	
$u(t-a)$	$\frac{1}{s} e^{-as}$	Enhetssprang
$y(t-a) u(t-a)$	$e^{-as} Y(s)$	
$\delta(t-a)$	e^{-as}	Enhetspuls (Diracs delta)

Derivasjon og integrasjon:

$$\mathcal{L}(y'(t)) = sY - y(0)$$

$$\mathcal{L}(y''(t)) = s^2 Y - sy(0) - y'(0)$$

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t y(u) du\right) = \frac{1}{s} Y$$

Vedlegg 2: Eksakte trigonometriske verdier for noen vinkler

