

Matematikk 1

Første deleksamen — ny og utsatt

5. juni 2019

Løsningsforslag

Christian F. Heide

June 5, 2019

OPPGAVE 1

Finn eventuelle vertikale asymptoter og skråasymptoter for følgende funksjon:

$$f(x) = \frac{2x^3 - x^2}{(x-2)^2} \quad x \neq 2$$

Vertikale asymptoter kan vi ha der nevneren er null, dvs. for $x = 2$, så sant ikke også telleren er null for denne x -en. (I så fall får vi et $\frac{0}{0}$ -uttrykk, som vi må undersøke nærmere, f. eks. ved hjelp av l'Hôpitals regel.) Her ser vi at telleren blir $2 \cdot 2^3 - 2^2 = 16 - 4 = 12 \neq 0$, så dette er ikke noe problem i dette tilfellet.

Altså vil funksjonen ha en vertikal asymptote for $x = 2$.

Siden telleren har grad 3 og nevneren har grad 2, vil brøken ha en skråasymptote (og altså ingen horisontal asymptote). Denne finner vi enklest ved å utføre en polynomdivisjon. Vi må først gange ut nevneren:

$$(x-2)^2 = x^2 - 4x + 4$$

Så utfører vi polynomdivisjonen:

$$\begin{array}{r} (2x^3 - x^2) : (x^2 - 4x + 4) = 2x + 7 \\ -(2x^3 - 8x^2 + 8x) \\ \hline 7x^2 - 8x \\ -(7x^2 - 28x + 28) \\ \hline 20x - 28 \end{array}$$

Vi ser av dette at funksjonen har skråasymptoten $y = 2x + 7$.

OPPGAVE 2

Bestem følgende grenseverdi dersom den eksisterer. Grenseverdien skal bestemmes ved å bruke l'Hôpitals regel - ikke ved å regne ut på kalkulator.

$$\lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x-5} - 2}{x-9}$$

Vi ser først på telleren:

$$\lim_{x \rightarrow 9} (\sqrt{x-5} - 2) = \sqrt{9-5} - 2 = \sqrt{4} - 2 = 2 - 2 = 0$$

Vi ser at også nevneren går mot 0 når x går mot 9, fordi $9 - 9 = 0$.

Vi har altså et $\frac{0}{0}$ -uttrykk, og kan bruke l'Hôpitals regel hvor vi altså deriverer teller og nevner hver for seg:

$$\lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x-5} - 2}{x-9} \stackrel{\text{l'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 9} \frac{\frac{1}{2}(x-5)^{\frac{1}{2}-1} - 0}{1-0} = \lim_{x \rightarrow 9} \frac{\frac{1}{2}(x-5)^{-\frac{1}{2}}}{1} =$$

$$\frac{1}{2}(9-5)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot 4^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} =$$

$$\underline{\underline{\frac{1}{4}}}$$

OPPGAVE 3

Gitt funksjonen

$$f(x) = \left(\frac{x-3}{x+3} \right)^7$$

Finn $f'(x)$.

Her må vi bruke kjerneregelen med brøken som kerne, og får

$$f'(x) = 7 \cdot \left(\frac{x-3}{x+3} \right)^{7-1} \cdot \left(\frac{x-3}{x+3} \right)'$$

Brøken deriverer vi slik:

$$\begin{aligned} \left(\frac{x-3}{x+3} \right)' &= \frac{(x-3)' \cdot (x+3) - (x-3) \cdot (x+3)'}{(x+3)^2} = \\ &= \frac{1 \cdot (x+3) - (x-3) \cdot 1}{(x+3)^2} = \frac{x+3 - (x-3)}{(x+3)^2} = \\ &= \frac{x+3 - x + 3}{(x+3)^2} = \frac{6}{(x+3)^2} \end{aligned}$$

Vi får da

$$\begin{aligned} f'(x) &= 7 \cdot \left(\frac{x-3}{x+3} \right)^6 \cdot \left(\frac{x-3}{x+3} \right)' = 7 \cdot \left(\frac{x-3}{x+3} \right)^6 \cdot \frac{6}{(x+3)^2} = \\ &= 42 \cdot \left(\frac{x-3}{x+3} \right)^6 \cdot \frac{1}{(x+3)^2} = \end{aligned}$$

$$\underline{\underline{\frac{42(x-3)^6}{(x+3)^8}}}$$

OPPGAVE 4

Gitt to komplekse tall:

$$z = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$$

$$w = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$$

Regn ut $z + w$. Skriv svaret på rektangulær form, altså på formen $a + bi$.

Når vi skal addere to komplekse tall bør vi ha dem på rektangulær form. Vi omformer derfor tallene til rektangulær form:

$$z = 2e^{i\frac{\pi}{6}} = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

I vedlegget finner vi at

$$\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{og} \quad \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

Vi får da

$$z = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2}i = \underline{\sqrt{3} + i}$$

Tilsvarende får vi for w :

$$w = 2e^{i\frac{5\pi}{6}} = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$$

I vedlegget finner vi at

$$\cos\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{og} \quad \sin\frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

Dvs.

$$w = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = -2\frac{\sqrt{3}}{2} + 2\frac{1}{2}i = \underline{-\sqrt{3} + i}$$

Nå kan vi gjennomføre addisjonen:

$$z + w = \sqrt{3} + i + (-\sqrt{3} + i) = \sqrt{3} - \sqrt{3} + i + i = \underline{\underline{2i}}$$

OPPGAVE 5

Gitt funksjonen

$$f(x, y) = xe^y - e^y - e^x$$

Bestem de partiellderiverte av første og andre orden til f .

$$\underline{\underline{f_x = e^y - e^x}}$$

$$\underline{\underline{f_y = xe^y - e^y = (x-1)e^y}}$$

$$\underline{\underline{f_{xx} = -e^x}}$$

$$\underline{\underline{f_{xy} = f_{yx} = e^y}}$$

$$\underline{\underline{f_{yy} = xe^y - e^y = (x-1)e^y}}$$

OPPGAVE 6

Regn ut følgende integral:

$$\int \left(x^2 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + 4e^{3x} \right) dx$$

Vi integrerer hvert ledd for seg, og får

$$\int \left(x^2 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + 4e^{3x} \right) dx =$$

$$\int x^2 dx - \int \frac{1}{x} dx + \int 2x^{-2} dx + \int 4e^{3x} dx =$$

$$\frac{1}{3}x^3 - \ln|x| + 2 \cdot (-1)x^{-1} + 4 \cdot \frac{1}{3}e^{3x} + C =$$

$$\underline{\underline{\frac{1}{3}x^3 - \ln|x| - \frac{2}{x} + \frac{4}{3}e^{3x} + C}}$$

OPPGAVE 7

Regn ut følgende integral:

$$\int \frac{x-10}{x^2-5x+4} dx$$

Dersom nevneren har reelle røtter, kan vi delbrøkkoppspalte integranden. Vi sjekker dette:

$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2}$$

som gir

$$x = \frac{5+3}{2} = \frac{8}{2} = 4 \quad \vee \quad x = \frac{5-3}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Dette betyr at nevneren kan faktoriseres slik

$$x^2 - 5x + 4 = (x-4)(x-1)$$

Vi kan derfor utføre en delbrøkkoppspalting av integranden:

$$\frac{x-10}{x^2-5x+4} = \frac{A}{x-4} + \frac{B}{x-1}$$

Vi multipliserer begge sider med $(x-4)(x-1)$, og får

$$x-10 = A(x-1) + B(x-4) \quad (*)$$

Vi setter så inn $x = 4$ i $(*)$, og får

$$4-10 = A(4-1) + B(4-4)$$

$$-6 = 3A$$

$$A = \frac{-6}{3} = -2$$

Så setter vi inn $x = 1$ i $(*)$, og får

$$1-10 = A(1-1) + B(1-4)$$

$$-9 = -3B$$

$$B = \frac{-9}{-3} = 3$$

Delbrøkoppspaltingen blir altså

$$\frac{x-10}{x^2-5x+4} = -\frac{2}{x-4} + \frac{3}{x-1}$$

Vi kan da utføre integrasjonen:

$$\begin{aligned}\int \frac{x-10}{x^2-5x+4} dx &= \int \left(-\frac{2}{x-4}\right) dx + \int \frac{3}{x-1} dx = \\ &= -2 \int \frac{1}{x-4} dx + 3 \int \frac{1}{x-1} dx =\end{aligned}$$

$$\underline{\underline{-2\ln|x-4| + 3\ln|x-1| + C}}$$

OPPGAVE 8

Regn ut følgende integral:

$$\int \sin x \cdot \sqrt{\cos x + 1} dx$$

For å kunne integrere denne, må vi bruke substitusjon (variabelskifte).

Hvis vi kaller $\cos x + 1$ for u , får vi

$$\frac{du}{dx} = -\sin x$$

som gir

$$dx = -\frac{1}{\sin x} du$$

Setter vi dette inn i integralet, får vi

$$\int \sin x \cdot \sqrt{\cos x + 1} dx = \int \sin x \cdot \sqrt{u} \cdot \left(-\frac{1}{\sin x}\right) du$$

Vi kan så forkorte $\sin x$, og får

$$\begin{aligned}-\int \sqrt{u} du &= -\int u^{\frac{1}{2}} du = -\frac{1}{\frac{1}{2}+1} u^{\frac{1}{2}+1} + C = -\frac{1}{\frac{3}{2}} u^{\frac{3}{2}} + C = \\ &= -\frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} + C\end{aligned}$$

Til slutt erstatter vi u med $\cos x + 1$, og får

$$-\frac{2}{3}(\cos x + 1)^{\frac{3}{2}} + C$$

Altså

$$\int \sin x \cdot \sqrt{\cos x + 1} \, dx = -\frac{2}{3}(\cos x + 1)^{\frac{3}{2}} + C$$

OPPGAVE 9

En kurve i planet er definert ved følgende ligning:

$$x^2 y^3 + e^{-y} = 2x - 3$$

Finn ligningen for tangenten til kurven i punktet $(2, 0)$.

Ligningen for en rett linje med stigningstall a gjennom punktet (x_0, y_0) er gitt av den såkalte ettpunktsformelen som kan skrives

$$y - y_0 = a(x - x_0)$$

Her skal linjen gå gjennom punktet $(2, 0)$. Altså er $x_0 = 2$ og $y_0 = 0$.

Stigningstallet er gitt av den deriverte i punktet. Fordi vi ikke klarer å løse ligningen med hensyn på y , må vi foreta en implisitt derivasjon. Implisitt derivasjon gir:

$$2x \cdot y^3 + x^2 \cdot 3y^2 \cdot y' + (-e^{-y})y' = 2$$

Vi må løse denne med hensyn på y' .

Vi samler først alle ledd som inneholder y' på venstre side og alle andre ledd på høyre side:

$$3x^2 y^2 y' - e^{-y} y' = 2 - 2xy^3$$

Vi trekker y' på utsiden av en parentes på venstre side:

$$(3x^2 y^2 - e^{-y})y' = 2 - 2xy^3$$

Så deler vi på begge sider med uttrykket i parentesen, og får følgende uttrykk for den deriverte:

$$y'(x, y) = \frac{2 - 2xy^3}{3x^2 y^2 - e^{-y}}$$

Vi kan nå finne stigningstallet til tangenten i punktet $(2, 0)$ ved å sette inn $x = 2$ og $y = 0$ i dette uttrykket, og får da:

$$y'(2, 0) = \frac{2 - 2 \cdot 2 \cdot 0^3}{3 \cdot 2^2 \cdot 0^2 - e^{-0}} = \frac{2 - 0}{0 - 1} = \frac{2}{-1} = -2$$

Ligningen for tangenten blir da

$$y - 0 = -2(x - 2)$$

som gir

$$\underline{\underline{y = -2x + 4}}$$