

Matematikk 1

Første deleksamen

4. juni 2018

Løsningsforslag

Christian F. Heide

June 8, 2018

OPPGAVE 1

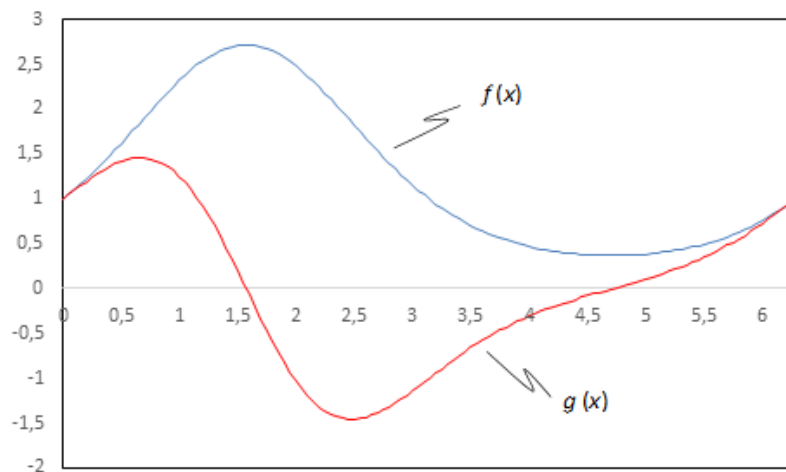
a) Forklar kortfattet hva den deriverte av en funksjon uttrykker.

Den deriverte gir stigningstallet til tangenten til funksjonens graf i ett punkt, eller i ethvert punkt dersom vi har et funksjonsuttrykk for den deriverte.

b) Nedenfor er grafene til to funksjoner, $f(x)$ og $g(x)$, tegnet. Den ene funksjonen er den deriverte av den andre.

Forklar og begrunn hvilken av disse funksjonene som er den deriverte av den andre.

Vi vet at den deriverte er null i grafens topp- og bunnpunkter. Det enkleste er derfor å sjekke om en av funksjonene krysser x -aksen der den andre har ekstremalpunkter. Vi ser at $g(x)$ krysser x -aksen nettopp der $f(x)$ har sine ekstremalverdier (omkring 1.6 og 4.7). Vi ser at det motsatt ikke er tilfelle. Vi kan derfor konkludere med at $g(x)$ er den deriverte av $f(x)$, altså at



$$\underline{g(x) = f'(x)}$$

Dersom noen lurer på hvilke funksjoner jeg har benyttet her, kan jeg røpe at det er $f(x) = e^{\sin x}$ og $g(x) = e^{\sin x} \cos x$.

OPPGAVE 2

Deriver følgende funksjon:

$$f(x) = \sin^2 x \cdot \cos^2 x$$

Her må vi bruke produktregelen for derivasjon, som lyder

$$(uv)' = u'v + uv'$$

I tillegg må vi bruke kjerneregelen. Denne gir at

$$(\sin^2 x)' = 2 \sin x \cdot (\sin x)' = 2 \sin x \cdot \cos x$$

og

$$(\cos^2 x)' = 2 \cos x \cdot (\cos x)' = 2 \cos x \cdot (-\sin x) = -2 \cos x \cdot \sin x$$

Vi får da

$$f'(x) = 2 \sin x \cdot \cos x \cdot \cos^2 x + \sin^2 x \cdot (-2 \cos x \cdot \sin x) =$$

$$2 \sin x \cdot \cos^3 x - 2 \sin^3 x \cdot \cos x =$$

$$\underline{\underline{2 \sin x \cdot \cos x \cdot (\cos^2 x - \sin^2 x)}}$$

OPPGAVE 3

Gitt følgende vektorer i det euklidske rommet $\mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{v} = -\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$$

$$\mathbf{w} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$$

a) Undersøk om vektorene $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$ er ortogonale (altså om de står vinkelrett på hverandre).

Dette kan vi undersøke ved å regne ut skalarproduktet (prikkproduktet). Vektorene ortogonale hvis og bare hvis skalarproduktet er 0.

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = (-1) \cdot 2 + 3 \cdot (-1) + (-1) \cdot 2 = -2 - 3 - 2 = \underline{-7}$$

Vi ser at skalarproduktet er forskjellig fra 0, og vi kan derfor konkludere:

Vektorene er ikke ortogonale.

b) Finn vektoren $\mathbf{u} = \mathbf{v} \times \mathbf{w}$.

$$\mathbf{u} = \mathbf{v} \times \mathbf{w} =$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \cdot \mathbf{i} - \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \cdot \mathbf{j} + \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \cdot \mathbf{k} =$$

$$(3 \cdot 2 - (-1) \cdot (-1))\mathbf{i} - ((-1) \cdot 2 - (-1) \cdot 2)\mathbf{j} + ((-1)(-1) - 3 \cdot 2)\mathbf{k} =$$

$$(6 - 1)\mathbf{i} - (-2 + 2)\mathbf{j} + (1 - 6)\mathbf{k} =$$

$$\underline{5\mathbf{i} - 5\mathbf{k}}$$

OPPGAVE 4

Bruk lineær approksimasjon av funksjonen $f(x) = \sqrt[3]{x}$ omkring $a = 8$ til å finne en tilnærmet verdi for $\sqrt[3]{8.12}$.

Tips: Husk at $\sqrt[3]{8} = 2$.

Lineær approksimasjon er gitt ved

$$f(a + \Delta a) \approx f(a) + f'(a) \cdot \Delta a$$

Vi benytter her lineær approksimasjon omkring $a = 8$. Da er $\Delta a = 0.12$.

Vi må derivere funksjonen. For lettere å gjøre dette, skriver vi den som $f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$. Vi får da

$$f'(x) = \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-\frac{3}{3}} = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$$

Vi kan nå regne ut verdien:

$$\sqrt[3]{8.12} = f(8 + 0.12) \approx$$

$$f(8) + f'(8) \cdot 0.12 =$$

$$\sqrt[3]{8} + \frac{1}{3} \cdot 8^{-\frac{2}{3}} \cdot 0.12 =$$

$$2 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8^{\frac{2}{3}}} \cdot 0.12 =$$

$$2 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot 0.12 =$$

$$2 + \frac{1}{12} \cdot \frac{12}{100} =$$

$$2 + \frac{1}{100} =$$

$$\underline{\underline{2.01}}$$

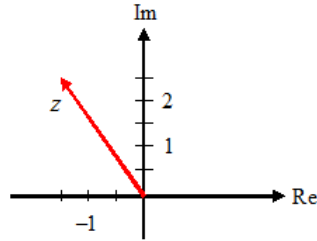
OPPGAVE 5

Gitt det komplekse tallet

$$z = 3e^{\frac{2\pi}{3}i}$$

a) Tegn tallet z i det komplekse planet.

Tallet har modulus (lengde) 3 og argument (vinkel) $\frac{2\pi}{3}$. Denne vinkelen tilsvarer 120° .



b) Skriv z på rektangulær form (også kalt kartesisk form).

Eulers formel $e^{i\phi} = \cos \phi + i \sin \phi$, gir

$$z = 3e^{\frac{2\pi}{3}i} = 3 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right)$$

Cosinus- og sinusverdien til $\frac{2\pi}{3}$ finner vi i vedlegget. Disse er henholdsvis $-\frac{1}{2}$ og $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Vi får derfor

$$z = 3 \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = \underline{\underline{-\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i}}$$

OPPGAVE 6

En kurve i planet er definert ved følgende ligning:

$$xy^3 - x^3y = 6$$

a) Vis at punktet $(1, 2)$ ligger på kurven.

Dette viser vi ved å sette inn $x = 1$ og $y = 2$ på venstre side i ligningen, og vise at det gir en venstreside som blir lik høyre side. Vi setter inn tallene, og får:

$$1 \cdot 2^3 - 1^3 \cdot 2 = 1 \cdot 8 - 1 \cdot 2 = 8 - 2 = 6$$

Vi ser at venstre side blir lik høyre side. Koordinatene til punktet oppfyller altså ligningen, og punktet ligger følgelig på kurven.

b) Finn ligningen for tangenten til kurven i dette punktet.

Her må vi foreta en implisitt derivasjon for å finne helningen til tangenten i punktet. Når vi deriverer må vi huske å bruke produktregelen, siden begge ledd på venstre side består av flere faktorer. Vi får

$$1 \cdot y^3 + x \cdot 3y^2 \cdot y' - (3x^2 \cdot y + x^3 \cdot y') = 0$$

som gir

$$y^3 + 3xy^2y' - 3x^2y - x^3y' = 0$$

Vi flytter alt som ikke inneholder y' over på høyre side:

$$3xy^2y' - x^3y' = 3x^2y - y^3$$

y' er nå felles faktor i begge ledd på venstre side, så vi kan ta den på utsiden av en parentes:

$$(3xy^2 - x^3)y' = 3x^2y - y^3$$

Så deler vi på begge sider med uttrykket i parentes:

$$y' = \frac{3x^2y - y^3}{3xy^2 - x^3}$$

Vi har nå et uttrykk for den deriverte, og kan da finne stigningstallet til tangenten i punktet vårt:

$$y'(1,2) = \frac{3 \cdot 1^2 \cdot 2 - 2^3}{3 \cdot 1 \cdot 2^2 - 1^3} = \frac{6 - 8}{12 - 1} = -\frac{2}{11}$$

Vi kan så bruke topunktsformelen $y - y_0 = a(x - x_0)$ for å finne ligningen til tangenten. Her er $x_0 = 1$, $y_0 = 2$ og $a = -\frac{2}{11}$. Vi får da

$$y - 2 = -\frac{2}{11}(x - 1)$$

som gir

$$y = -\frac{2}{11}x + \frac{2}{11} + 2 = -\frac{2}{11}x + \frac{2}{11} + \frac{22}{11}$$

og altså

$$\underline{\underline{y = -\frac{2}{11}x + \frac{24}{11} = \frac{2}{11}(-x + 12)}}$$

OPPGAVE 7

Bestem følgende grenseverdi:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right)$$

Her ser vi at både den første og den andre brøken går mot uendelig når x går mot 0. Vi har altså et $\infty - \infty$ -uttrykk. Et slikt uttrykk kan vi **ikke** bruke l'Hôpitals regel på. For at vi skal kunne bruke l'Hôpitals regel, må vi ha et uttrykk på formen $\frac{0}{0}$ eller $\frac{\infty}{\infty}$.

Vi kan forsøke å slå sammen brøkene slik at vi muligens får et uttrykk vi kan bruke l'Hôpitals regel på:

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} = \frac{1}{x} \cdot \frac{e^x - 1}{e^x - 1} - \frac{1}{e^x - 1} \cdot \frac{x}{x} = \frac{e^x - 1 - x}{x(e^x - 1)}$$

Vi ser nå at vi får et $\frac{0}{0}$ -uttrykk:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x - 1 - x}{x(e^x - 1)} \right) = \frac{e^0 - 1 - 0}{0 \cdot (e^0 - 1)} = \frac{1 - 1 - 0}{0 \cdot (1 - 1)} = \frac{0}{0}$$

På et slikt uttrykk kan vi bruke l'Hôpitals regel. Vi deriverer teller og nevner hver for seg, og får

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x - 1 - x}{x(e^x - 1)} \right) \stackrel{\text{l'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x - 1}{1 \cdot (e^x - 1) + x e^x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x - 1}{e^x - 1 + x e^x} \right) =$$

$$\frac{e^0 - 1}{e^0 - 1 + 0 \cdot e^0} = \frac{1 - 1}{1 - 1 + 0} = \frac{0}{0}$$

Vi får altså på nytt et $\frac{0}{0}$ -uttrykk, og vi kan bruke l'Hôpitals regel en gang til:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x - 1}{e^x - 1 + x e^x} \right) \stackrel{\text{l'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x + 0}{e^x + 0 + 1 \cdot e^x + x \cdot e^x} \right) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x}{2e^x + x e^x} \right) = \frac{e^0}{2e^0 + 0 \cdot e^0} = \frac{1}{2 \cdot 1 + 0} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

OPPGAVE 8

Gitt en funksjon av to variable:

$$f(x, y) = \sin(xy)$$

Finn de partiellderiverte av første og annen orden til $f(x, y)$.

Her må vi betrakte sin u som ytre funksjon, og $u = xy$ som kjerne. Vi må bruke kjernerege-len når vi deriverer. Vi får:

$$f_x = \underline{\underline{y \cos(xy)}}$$

$$f_y = \underline{\underline{x \cos(xy)}}$$

$$f_{xx} = \underline{\underline{-y^2 \sin(xy)}}$$

$$f_{yy} = \underline{\underline{-x^2 \sin(xy)}}$$

$$f_{xy} = 1 \cdot \cos(xy) + y \cdot (-\sin(xy)) \cdot x = \underline{\underline{\cos(xy) - xy \sin(xy)}}$$

$$f_{yx} = 1 \cdot \cos(xy) + x \cdot (-\sin(xy)) \cdot y = \underline{\underline{\cos(xy) - xy \sin(xy)}}$$

OPPGAVE 9

Regn ut følgende integral:

$$\int \left(2 + 3x - \sin 5x + \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2} \right) dx$$

Vi skriver om brøkene i integranden for å gjøre det enklere å se hva de antideriverte er:

$$\int \left(2 + 3x - \sin 5x + \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2} \right) dx = \int (2 + 3x - \sin 5x + 3x^{-1} + 2x^{-2}) dx =$$

$$2x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{5}\cos 5x + 3\ln|x| + \frac{2}{-2+1}x^{-2+1} + C =$$

$$\underline{\underline{2x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{5}\cos 5x + 3\ln|x| - 2x^{-1} + C}}$$

OPPGAVE 10

Regn ut følgende integral:

$$\int e^x \cdot e^{-2e^x} dx$$

Vi forsøker oss med substitusjonen

$$u = -2e^x$$

Dette gir

$$\frac{du}{dx} = -2e^x$$

og følgelig

$$dx = -\frac{1}{2e^x} du$$

Setter vi inn dette i integralet, får vi

$$\int e^x \cdot e^u \left(-\frac{1}{2e^x}\right) du$$

Vi kan nå forkorte e^x , og får forenklet integralet til

$$-\frac{1}{2} \int e^u du$$

som gir

$$-\frac{1}{2} e^u + C$$

Tilbakesubstituerer vi nå $u = -2e^x$, får vi

$$\underline{\underline{-\frac{1}{2} e^{-2e^x} + C}}$$

OPPGAVE 11

Regn ut følgende integral:

$$\int \frac{3x^2 + 2x + 4}{x^3 + 4x} dx$$

Her må vi forsøke å delbrøkkoppspalte. Nevneren kan faktorerises slik: $x^3 + 4x = x(x^2 + 4)$. $x^2 + 4$ har ingen reelle røtter. Delbrøkkoppspaltingen må følgelig gjøres slik:

$$\frac{3x^2 + 2x + 4}{x^3 + 4x} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 4}$$

Vi ganger begge sider med $x(x^2 + 4)$ og får

$$3x^2 + 2x + 4 = A(x^2 + 4) + (Bx + C)x$$

Vi setter inn noen verdier for x for å bestemme konstantene A, B og C .

$x = 0$ gir

$$3 \cdot 0^2 + 2 \cdot 0 + 4 = A(0^2 + 4) + (B \cdot 0 + C) \cdot 0$$

$$4 = 4A$$

$$\underline{A = 1}$$

$x = 1$ gir

$$3 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 + 4 = 1 \cdot (1^2 + 4) + (B \cdot 1 + C) \cdot 1$$

$$3 + 2 + 4 = 5 + B + C$$

$$B = 4 - C$$

$x = -1$ gir

$$3 \cdot (-1)^2 + 2 \cdot (-1) + 4 = 1 \cdot ((-1)^2 + 4) + (B \cdot (-1) + C) \cdot (-1)$$

$$3 - 2 + 4 = 5 + B - C$$

$$0 = B - C$$

Vi setter så inn $B = 4 - C$ som vi fant ovenfor, og får

$$0 = 4 - C - C$$

$$2C = 4$$

$$C = 2$$

som igjen gir

$$B = 4 - C = 4 - 2 = 2$$

Delbrøkkoppspaltingen blir altså

$$\frac{3x^2 + 2x + 4}{x^3 + 4x} = \frac{1}{x} + \frac{2x + 2}{x^2 + 4}$$

Vi kan nå integrere:

$$\int \frac{3x^2 + 2x + 4}{x^3 + 4x} dx = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{2x+2}{x^2+4} \right) dx = \int \frac{1}{x} dx + \int \frac{2x+2}{x^2+4} dx =$$

$$\int \frac{1}{x} dx + \int \frac{2x}{x^2+4} dx + \int \frac{2}{x^2+4} dx$$

Vi tar for oss disse tre integralene hver for seg.

Det første er rett frem:

$$\int \frac{1}{x} dx = \underline{\ln|x| + C_1}$$

Det andre integralet, $\int \frac{2x}{x^2+4} dx$, kan vi løse ved hjelp av substitusjonen

$$u = x^2 + 4.$$

Denne substitusjonen gir

$$\frac{du}{dx} = 2x$$

og følgelig

$$dx = \frac{1}{2x} du$$

Setter vi inn dette, får vi

$$\int \frac{2x}{x^2+4} dx = \int \frac{2x}{u} \cdot \frac{1}{2x} du = \int \frac{1}{u} du = \ln|u| + C_2 = \ln|x^2+4| + C_2 =$$

$$\underline{\ln(x^2+4) + C_2}$$

Den siste likheten her, skyldes at $x^2 + 4$ er positivt for alle reelle x .

Det siste integralet finner vi ved å trikse med integranden slik at vi får et uttrykk hvor vi kan bruke regelen $\int \frac{1}{x^2+1} dx = \arctan x + C$:

$$\int \frac{2}{x^2+4} dx = \int \frac{2}{4(\frac{1}{4}x^2+1)} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{(\frac{1}{2}x)^2+1} dx$$

Vi kan så gjøre substitusjonen

$$u = \frac{1}{2}x$$

som gir

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{2}$$

og følgelig

$$dx = 2du$$

Vi setter inn dette, og får

$$\frac{1}{2} \int \frac{1}{(\frac{1}{2}x)^2 + 1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{u^2 + 1} \cdot 2 du = \arctan u + C_3 =$$

$$\underline{\underline{\arctan \frac{x}{2} + C_3}}$$

Alt i alt får vi derfor

$$\int \frac{3x^2 + 2x + 4}{x^3 + 4x} dx = \underline{\underline{\ln|x| + \ln(x^2 + 4) + \arctan \frac{x}{2} + C}}$$