Høgskolen i Østfold

12. juni 2017

EKSAMEN – Løsningsforslag

Emnekode: ITD15013	**Emnenavn:** Matematikk 1 – første deleksamen
Dato: 6. juni 2017	**Eksamenstid:** 09.00 – 12.00
Hjelpemidler: - To A4-ark med valgfritt innhold på begge sider. - Formelhefte. - Kalkulator som deles ut samtidig med oppgaven.	**Faglærer:** Christian F Heide

Om eksamensoppgaven og poengberegning:

Oppgavesettet består av 5 sider inklusiv denne forsiden og et vedlegg på én side. Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgavesettet består av 12 oppgaver. Ved sensur vil alle de 12 oppgavene telle like mye.

Der det er mulig skal du vise utregninger og hvordan du kommer fram til svarene.

Sensurfrist:

28. juni 2017

Karakterene er tilgjengelige for studenter på Studentweb senest 2 virkedager etter oppgitt sensurfrist. www.hiof.no/studentweb

Oppgave 1

Gitt følgende vektorer i det euklidske rommet $\mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{v} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$$

$$\mathbf{w} = -\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$$

Finn kryssproduktet mellom disse vektorene, altså $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$.

$$\mathbf{v} \times \mathbf{w} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & -3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} k =$$

$$((-1) \cdot 4 - 2 \cdot (-3)) \cdot \mathbf{i} - (2 \cdot 4 - 2 \cdot (-1)) \cdot \mathbf{j} + (2 \cdot (-3) - (-1) \cdot (-1)) \cdot \mathbf{k} =$$

$$(-4 + 6) \cdot \mathbf{i} - (8 + 2) \cdot \mathbf{j} + (-6 - 1) \cdot \mathbf{k} =$$

$$\underline{\underline{2\mathbf{i} - 10\mathbf{j} - 7\mathbf{k}}}$$

Oppgave 2

Gitt to komplekse tall

$$z = 2\sqrt{3}\,e^{i\frac{\pi}{6}}$$

$$w = \sqrt{3}\,e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

Finn summen av disse, altså $z + w$.

For å summere disse tallene, er det enklest dersom vi først konverterer dem til rektangulær form (også kalt kartesisk form):

$$z = 2\sqrt{3}\,e^{i\frac{\pi}{6}} = 2\sqrt{3} \cdot (\cos\tfrac{\pi}{6} + i\sin\tfrac{\pi}{6}) = 2\sqrt{3} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 3 + \sqrt{3}\,i$$

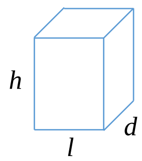
$$w = \sqrt{3}\,e^{-i\frac{\pi}{2}} = \sqrt{3} \cdot (\cos(-\tfrac{\pi}{2}) + i\sin(-\tfrac{\pi}{2})) = \sqrt{3} \cdot (0 - i) = -\sqrt{3}\,i$$

Vi får da

$$z + w = 3 + \sqrt{3}\,i - \sqrt{3}\,i = \underline{\underline{3}}$$

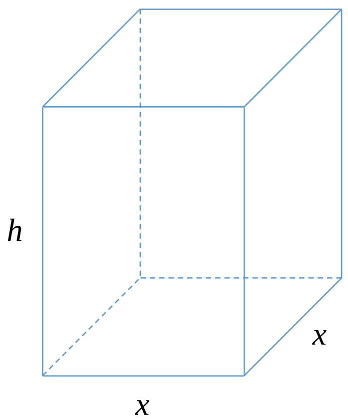
Oppgave 3

*Et flyselskap har bestemt seg for følgende begrensninger på bagasjen: All bagasje må være formet som en rektangulær boks med **kvadratisk** grunnflate. Summen av lengde (l), dybde (d) og høyde (h) må ikke overstige 150 cm.*



Finn dimensjonene av bagasjen som gir størst volum.

Siden grunnflaten skal være kvadratisk, må *l* og *d* være like. Vi kan kalle den *x* om vi ønsker:



Volumet av boksen er da

$$V = ldh = xxh = x^2 h$$

Videre har vi begrensningen at summen av sidekantene skal være 150 cm, altså

$$x + x + h = 150$$

og altså

$$h = 150 - 2x$$

Setter vi dette inn i uttrykket for volumet, får vi

$$V(x) = x^2 h = x^2(150 - 2x) = 150x^2 - 2x^3$$

Vi kan så derivere for å finne hvilke *x*-verdier som gjør funksjonen maksimal/minimal:

$$\frac{dV}{dx} = 2 \cdot 150\,x - 3 \cdot 2x^2 = 300\,x - 6x^2$$

Ekstremalverdiene finner vi der den deriverte er 0:

$$300x - 6x^2 = 0$$

som gir

$$x = 0 \quad \vee \quad 300 - 6x = 0$$

og altså

$$x = 0 \quad \vee \quad x = \frac{300}{6} = 50$$

$x = 0$ gir 0 i volum, så dette er ikke et maksimum.

$x = 50$ kan være et maksimum eller et minimum. At det er et maksimum kan begrunnes på flere måter. For eksempel kan vi se på den annenderiverte til volumet:

$$\frac{d^2V}{dx^2} = 300 - 12x$$

I punktet $x = 50$ blir denne $300 - 12 \cdot 50 = 300 - 600 = -300$. Vi ser at den annenderiverte er negativ, og volumfunksjonen $V(x)$ krummer derfor nedover. Altså er $x = 50$ et lokalt maksimum.

Dimensjonene som gir bagasjen størst volum er følgelig

$$\underline{\underline{x = l = d = 50 \text{ cm}}} \qquad \text{og} \qquad \underline{\underline{h =}}\ 150 - 2x = 150 - 2 \cdot 50 = \underline{\underline{50 \text{ cm}}}.$$

Vi får altså størst volum med bagasje hvor alle sidene er like lange (altså en kube).

Oppgave 4

Finn følgende grenseverdi dersom den eksisterer:

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - x - 1}{2x^2}$$

Vi ser at dette er et ubestemt uttrykk:

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - x - 1}{2x^2} = \frac{e^0 - 0 - 1}{2 \cdot 0^2} = \frac{1 - 1}{0} = \frac{0}{0}$$

Siden dette er et $\frac{0}{0}$–uttrykk, kan vi benytte l'Hôpitals regel:

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - x - 1}{2x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{4x}$$

Vi ser at dette igjen blir et $\frac{0}{0}$–uttrykk, siden

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{4x}=\frac{e^0-1}{4\cdot 0}=\frac{0}{0}$$

Vi må derfor bruke l'Hôpitals regel en gang til, og finner:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-x-1}{2x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{4x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{4}=\frac{e^0}{4}=\underline{\underline{\frac{1}{4}}}$$

Oppgave 5

Deriver følgende funksjon:

$$f(x)=x^{\ln x} \qquad \text{(}\textit{hint: benytt logaritmisk derivasjon}\text{)}$$

Før vi deriverer tar vi logaritmen på begge sider:

$$\ln\left(f(x)\right)=\ln x^{\ln x}$$

Vi bruker så regelen $\ln a^b=b\ln a$ på høyre side av uttrykket, og får

$$\ln\left(f(x)\right)=\ln x\cdot\ln x$$

Vi kan så derivere begge sider. Når vi deriverer venstre side må vi bruke kjerneregelen, og når vi deriverer høyre side må vi bruke produktregelen:

$$\frac{1}{f(x)}f'(x)=\frac{1}{x}\cdot\ln x+\ln x\cdot\frac{1}{x}$$

Så ganger vi begge sider med $f(x)$ og får

$$f'(x)=\left(\frac{\ln x}{x}+\frac{\ln x}{x}\right)\cdot f(x)=2\frac{\ln x}{x}\cdot f(x)=2\frac{\ln x}{x}\cdot x^{\ln x}=2\ln x\cdot x^{-1}\cdot x^{\ln x}$$

$$=2\ln x\cdot x^{\ln-1}=\underline{\underline{\ln x^2\cdot x^{\ln x-1}}}$$

Oppgave 6

Bestem følgende integral:

$$\int \left(3x^3 + \cos x - \frac{1}{x^3} + 4e^{2x} \right) dx$$

$$\int \left(3x^3 + \cos x - \frac{1}{x^3} + 4e^{2x} \right) dx = \int 3x^3 dx + \int \cos x \, dx - \int x^{-3} dx + \int 4e^{2x} dx =$$

$$3 \tfrac{1}{3+1} x^{3+1} + \sin x - \tfrac{1}{-3+1} x^{-3+1} + 4 \tfrac{1}{2} e^{2x} + C =$$

$$\underline{\underline{\tfrac{3}{4} x^4 + \sin x + \tfrac{1}{2} x^{-2} + 2e^{2x} + C}}$$

Oppgave 7

Bestem følgende integral:

$$\int x^2 \cdot \cos(x^3) dx$$

Her kan vi bruke substitusjonen

$$u = x^3$$

som gir

$$\frac{du}{dx} = 3x^2$$

og altså

$$dx = \frac{1}{3x^2} du$$

Bruker vi dette i integralet, får vi

$$\int x^2 \cdot \cos(x^3) dx = \int \cancel{x^2} \cdot \cos u \cdot \frac{1}{3\cancel{x^2}} du = \frac{1}{3} \int \cos u \, du =$$

$$\frac{1}{3} \sin u + C = \underline{\underline{\frac{1}{3} \sin x^3 + C}}$$

Oppgave 8

Bestem følgende integral:

$$\int x^4 \cdot \ln x \, dx$$

Her kan vi bruke delvis integrasjon. Regelen for delvis integrasjon kan skrives

$$\int u'v \, dx = uv - \int uv' \, dx$$

Her velger vi

$$u' = x^4 \text{ og } v = \ln x$$

som gir

$$u = \tfrac{1}{5}x^5 \text{ og } v' = \frac{1}{x}$$

Vi får da

$$\int x^4 \cdot \ln x \, dx = \tfrac{1}{5}x^5 \cdot \ln x - \int \tfrac{1}{5}x^5 \cdot \frac{1}{x} \, dx = \tfrac{1}{5}x^5 \cdot \ln x - \tfrac{1}{5}\int x^4 dx =$$

$$\tfrac{1}{5}x^5 \cdot \ln x - \tfrac{1}{5} \cdot \tfrac{1}{5}x^5 + C = \tfrac{1}{5}x^5 \cdot \ln x - \tfrac{1}{25}x^5 + C =$$

$$\underline{\underline{\tfrac{1}{5}x^5\left(\ln x - \tfrac{1}{5}\right) + C}}$$

Oppgave 9

Følgende ligning beskriver en kurve i planet:

$$2x + 2y = \ln y$$

Bestem ligningen til tangenten til kurven i punktet (–1, 1).

Vi kan benytte implisitt derivasjon for å finne stigningen til tangenten:

$$2 + 2y' = \frac{1}{y}y'$$

Ordner vi denne, får vi

$$\frac{1}{y}y' - 2y' = 2$$

$$\left(\frac{1}{y}-2\right)y' = 2$$

$$y' = \frac{2}{\frac{1}{y}-2}$$

Stigningskoeffisienten i punktet (–1, 1) er følgelig

$$y'(-1,1) = \frac{2}{\frac{1}{1}-2} = \frac{2}{-1} = -2$$

Vi kan så bruke ettpunktsformelen for å finne ligningen til tangenten:

$$y - y_0 = a(x - x_0)$$

$$y - 1 = -2(x-(-1))$$

$$y - 1 = -2x - 2$$

$$\underline{\underline{y = -2x - 1}}$$

Oppgave 10

Gitt følgende funksjon:

$$f(x,y) = x^2e^y - xy^3$$

Finn de partiellederiverte av 1. og 2. orden til denne funksjonen.

$$\underline{\underline{f_x = 2xe^y - y^3}}$$

$$\underline{\underline{f_y = x^2e^y - 3xy^2}}$$

$$\underline{\underline{f_{xx} = 2e^y}}$$

$$\underline{\underline{f_{yy} = x^2e^y - 6xy}}$$

$$\underline{\underline{f_{xy} = f_{yx} = 2xe^y - 3y^2}}$$

Oppgave 11

Følgende ligning har én reell løsning i intervallet [1, 3]:

$$x^5 = 33$$

Bruk Newtons metode med to iterasjoner til å finne $\sqrt[5]{33}$. *Benytt* $x_0 = 2$ *som startpunkt*.

Løsningen av den gitte ligningen, er altså

$$x = \sqrt[5]{33}$$

Newtons metode kan skrives slik:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Her er $f(x) = x^5 - 33$, og følgelig $f'(x) = 5x^4$.

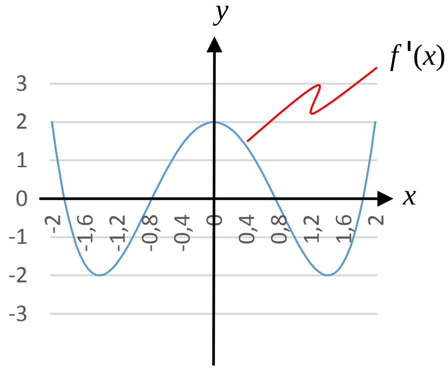
Vi får da

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 2 - \frac{2^5 - 33}{5 \cdot 2^4} = 2 - \frac{32 - 33}{5 \cdot 16} = 2 + \frac{1}{80} = 2.0125$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 2.0125 - \frac{2.0125^5 - 33}{5 \cdot 2.0125^4} = \underline{\underline{2.0123}}$$

Oppgave 12

Gitt en kontinuerlig funksjon $f(x)$ *som er definert på det åpne intervallet* $D_f = \langle -2, 2 \rangle$.
Funksjonen er ukjent, men vi kjenner grafen til funksjonens deriverte, altså grafen til $f'(x)$.
Denne grafen er vist i figuren nedenfor.



Du kan anta at grafen til den deriverte (altså den blå kurven i figuren) skjærer x-aksen i punktene $-1.8, -0.8, 0.8$ *og* 1.8.

i) *Angi i hvilke intervaller funksjonen* $f(x)$ *er voksende og avtagende.*
Funksjonen er voksende der den deriverte er positiv og avtagende der den deriverte er negativ.

$f(x)$ er **voksende** i følgende intervaller:

$\langle -2, -1.8 \rangle$

$\langle -0.8, 0.8 \rangle$

$\langle 1.8, 2 \rangle$

$f(x)$ er **avtagende** i følgende intervaller:

$\langle -1.8, -0.8 \rangle$

$\langle 0.8, 1.8 \rangle$

ii) *For hvilken eller hvilke x-verdier har funksjonen sine lokale maksimums- og minimumsverdier? Forklar og begrunn ditt svar.*
Siden funksjonen er definert på et åpent intervall, har den ingen ekstremalverdier i definisjonsmengdens endepunkter.
Funksjonen har sine ekstremalverdier der den deriverte er null.

Funksjonen har lokale **maksima** for følgende *x*-verdier: $\underline{\underline{-1.8 \text{ og } 0.8}}$.

Funksjonen har lokale **minima** for følgende *x*-verdier: $\underline{\underline{-0.8 \text{ og } 1.8}}$.