Høgskolen i Østfold

08.06.2016

EKSAMEN – ny og utsatt – løsningsforslag

Emnekode: ITD15013	**Emnenavn:** Matematikk 1 – første deleksamen
Dato: 3. juni 2016	**Eksamenstid:** 09.00 – 12.00
Hjelpemidler: - To A4-ark med valgfritt innhold på begge sider. - Formelhefte. Kalkulator er **ikke** tillatt.	**Faglærer:** Christian F Heide

Om eksamensoppgaven og poengberegning:

Oppgavesettet består av 5 sider inklusiv denne forsiden og to vedlegg. Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgavesettet består av 8 oppgaver med i alt 12 deloppgaver. Ved sensur vil alle deloppgaver telle omtrent like mye.

Der det er mulig skal du:

- vise utregninger og hvordan du kommer fram til svarene
- begrunne dine svar

Sensurfrist:

24. juni 2016

Karakterene er tilgjengelige for studenter på Studentweb senest 2 virkedager etter oppgitt sensurfrist. www.hiof.no/studentweb

Oppgave 1
Gitt følgende vektorer i det euklidske rommet $\mathbb{R}^3$:

$\mathbf{v} = -\,\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$

$\mathbf{w} = 5\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

Finn $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$.

$$\mathbf{v} \times \mathbf{w} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & -2 & 3 \\ 5 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} k =$$

$$((-2)\cdot 2 - 3\cdot(-1))\cdot \mathbf{i} - ((-1)\cdot 2 - 3\cdot 5)\cdot \mathbf{j} + ((-1)\cdot(-1) - (-2)\cdot 5)\cdot \mathbf{k} =$$

$$(-4 + 3)\cdot \mathbf{i} - (-2 - 15)\cdot \mathbf{j} + (1 + 10)\cdot \mathbf{k} =$$

$$\underline{\underline{-\mathbf{i} + 17\mathbf{j} + 11\mathbf{k}}}$$

Oppgave 2

a) *Gitt de komplekse tallene* $z = 1 - 3i$ *og* $w = 2 - i$.
Finn $z - w$ *og* $\frac{z}{w}$.
Skriv svarene på rektangulær form (også kjent som kartesisk form).

$$z - w = (1-3i) - (2-i) = 1 - 2 - 3i + i =$$

$$\underline{\underline{-1-2i}}$$

$$\frac{z}{w} = \frac{1-3i}{2-i} = \frac{1-3i}{2-i}\cdot\frac{2+i}{2+i} = \frac{1\cdot 2 + 1\cdot i - 3i\cdot 2 - 3i\cdot i}{2^2 + 1^2} =$$

$$\frac{2 + i - 6i - 3\cdot(-1)}{4+1} = \frac{5-5i}{5} = \frac{5}{5} + \frac{-5i}{5} =$$

$$\underline{\underline{1-i}}$$

b) *Skriv tallet* $v = \sqrt{3} + i$ *på eksponentialform.*

Modulus: $r = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = \underline{2}$

Argument: $\cos\varphi = \dfrac{\mathrm{Re}(z)}{r} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

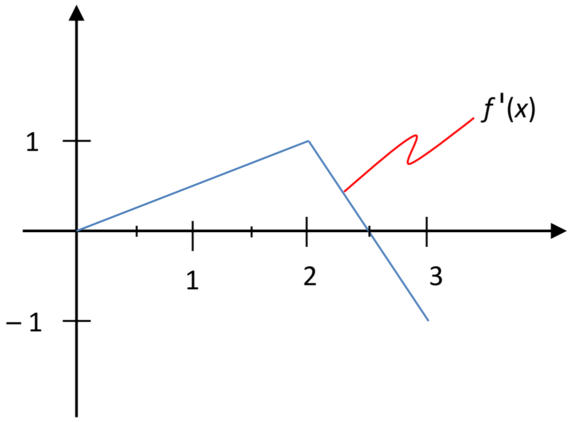
$$\varphi = \cos^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2} = \underline{\frac{\pi}{6}} \quad \vee \quad \varphi = \underline{\frac{11\pi}{6}}$$

Fordi både realdelen og imaginærdelen er positive, ligger tallet i 1. kvadrant, og argumentet er derfor $\varphi = \dfrac{\pi}{6}$. Tallet på eksponentialform blir derfor

$$v = re^{i\varphi} = \underline{\underline{2e^{i\frac{\pi}{6}}}}$$

Oppgave 3

Gitt en kontinuerlig funksjon f(x) som er definert på det åpne intervallet $D_f = \langle 0, 3\rangle$.
Funksjonen er ukjent, men vi kjenner grafen til funksjonens deriverte, altså grafen til $f'(x)$.
Denne grafen er vist i figuren nedenfor.



- *Angi i hvilke intervaller funksjonen f(x) er voksende og avtagende.*
  Funksjonen er voksende der den deriverte er positiv, altså i intervallet $\langle 0, 2.5\rangle$.
  Funksjonen er avtagende i intervallet $\langle 2.5, 3\rangle$.

- *For hvilken eller hvilke x-verdier har funksjonen sine maksimums- og minimumsverdier?*
  Funksjonen har sine ekstremalverdier der den deriverte er null eller i randpunktene til definisjonsområdet. Her er definisjonsområdet et åpent intervall, og det finnes derfor ikke noen randpunkter.
  Den deriverte er 0 i x = 0 og x = 2.5. Men det er fortsatt slik at 0 ikke er med i definisjonsområdet, og funksjonen har derfor ikke noen ekstremalverdi i x = 0.
  Eneste ekstremalverdi er derfor for x = 2.5. Siden funksjonen er voksende i området $\langle 0, 2.5\rangle$ er dette ekstremalpunktet et maksimumspunkt. Konklusjon:
  <u>$f(x)$ har en maksimalverdi for x = 2.5.</u>

Oppgave 4
Finn følgende grenseverdi dersom den eksisterer:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{3x+2x^2}$$

Siden sin 0 = 0 og nevneren også blir 0 dersom vi setter inn x = 0, vil dette bli et $\frac{0}{0}$–uttrykk.

Vi kan derfor benytte l'Hôpitals regel som sier at vi for slike uttrykk kan derivere teller og nevner hver for seg uten å endre grenseverdien. Vi får da:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{3x+2x^2} \overset{l'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2\sin x \cdot \cos x}{3+4x} = \frac{2\cdot \sin 0 \cdot \cos 0}{3+4\cdot 0} = \frac{2\cdot 0\cdot 1}{3} = \frac{0}{3} = \underline{\underline{0}}$$

Oppgave 5
Følgende ligning beskriver en kurve i planet:

$$y(1-y^2)+\sin(2\pi x)=0$$

Vis at punktet (1, 1) *ligger på kurven, og finn ligningen til kurvens tangent i dette punktet*.

Vi kan vise at (1, 1) ligger på kurven ved å se at x = 1 og y = 1 passer inn i ligningen. Venstre side i ligningen blir da

$$1\cdot(1-1^2)+\sin(2\pi)=1\cdot 0+0=0$$

Vi ser av dette at punktets koordinater oppfyller ligningen, og punktet ligger derfor på kurven.

Vi kan nå finne stigningstallet til tangenten i punktet ved en implisitt derivasjon. Jeg velger å gange ut parentesen først, slik at jeg får ligningen på formen

$$y-y^3+\sin(2\pi x)=0$$

Så deriverer vi:

$$1\cdot y'-3y^2y'+2\pi\cos(2\pi x)=0$$

Vi flytter alle ledd som ikke inneholder y' over på høyre side og trekker y' utenfor en parentes på venstre side:

$$(1-3y^2)y'=-2\pi\cos(2\pi x)$$

Så deler begge sider med uttrykket i parentesen, og får da et uttrykk for den deriverte:

$$y'=\frac{-2\pi\cos(2\pi x)}{1-3y^2}=\frac{2\pi\cos(2\pi x)}{3y^2-1}$$

Vi setter så inn koordinatene til punktet, og får

$$y'(1,1) = \frac{2\pi\cos(2\pi\cdot 1)}{3\cdot 1^2 - 1} = \frac{2\pi\cos(2\pi)}{2} = \underline{\pi}$$

Dette er stigningstallet til tangenten i punktet. Vi bruker så ettpunktsformelen for å finne ligningen til tangenten:

$$y - y_0 = a(x - x_0)$$

hvor *a* er stigningstallet og (x_0, y_0) er et kjent punkt på linjen. I vårt tilfelle er altså $a = \pi$, $x_0 = 1$ og $y_0 = 1$. Vi får da

$$y - 1 = \pi\cdot(x - 1)$$

som gir

$$y = \underline{\underline{\pi(x-1)+1}} = \underline{\underline{\pi\, x - \pi + 1}}$$

Oppgave 6

En funksjon av to variable gitt ved

$$f(x,y) = 8x - 4y - 2x^2 - y^2$$

er definert for alle reelle x og y.

a) *Finn de partiellderiverte av 1. og 2. orden, altså*

$$\frac{\partial f}{\partial x},\ \frac{\partial f}{\partial y},\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x},\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y},\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \text{ og } \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x = 8 - 0 - 4x - 0 = \underline{\underline{8 - 4x}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = f_y = 0 - 4 - 0 - 2y = \underline{\underline{-4 - 2y}}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} = f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(8 - 4x) = \underline{\underline{0}}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = f_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(-4 - 2y) = \underline{\underline{0}}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(8 - 4x) = \underline{\underline{-4}}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(-4-2y) = \underline{\underline{-2}}$$

b) *Finn og klassifiser eventuelle lokale ekstremalverdier for* $f(x, y)$.
Lokale ekstremalverdier har vi der de partiellderiverte er 0:

$$f_x = 0$$

gir

$$8 - 4x = 0$$

og altså

$$\underline{x = 2}$$

$$f_y = 0$$

gir

$$-4 - 2y = 0$$

og altså

$$\underline{y = -2}$$

Vi har altså et kritisk punkt i (2, –2).

Vi må så undersøke om dette er et makspunkt, minpunkt eller et sadelpunkt ved hjelp av diskriminanten

$$\Delta = f_{xx} \cdot f_{yy} - f_{xy}{}^2$$

Sjekker vi denne i punktet (2, –2) finner vi

$$\Delta = (-4) \cdot (-2) - 0^2 = 8$$

Siden $\Delta > 0$ og $f_{xx} < 0$ vet vi at dette er et lokalt maksimum. Funksjonsverdien er

$$f(2,-2) = 8 \cdot 2 - 4 \cdot (-2) - 2 \cdot 2^2 - (-2)^2 = 16 + 8 - 8 - 4 = \underline{\underline{12}}$$

Konklusjon:

<u>Funksjonen har et lokalt maksimum i punktet (2, –2, 12).</u>

Oppgave 7
Finn følgende integral:

a) $\int\left(\frac{2}{x^2}+\frac{3}{x}+3\cos x-4e^{2x}\right)dx$

Her kan det være lurt å skrive om det første leddet i integranden for at det skal være lettere å integrere:

$$\int\left(\frac{2}{x^2}+\frac{3}{x}+3\cos x-4e^{2x}\right)dx=\int\left(2x^{-2}+3\cdot\frac{1}{x}+3\cos x-4e^{2x}\right)dx=$$

$$2\cdot\tfrac{1}{-1}x^{-2+1}+3\ln|x|+3\sin x-4\cdot\tfrac{1}{2}e^{2x}+C=$$

$$\underline{\underline{-2x^{-1}+3\ln|x|+3\sin x-2e^{2x}+C}}$$

b) $\int x^2\ln x\,dx$

Her må vi bruke delvis integrasjon. Regelen for dette er

$$\int u'v\,dx=uv-\int uv'\,dx$$

Vi velger nå å kalle

$$u'=x^2\ \text{ og }\ v=\ln x$$

som gir

$$u=\tfrac{1}{3}x^3\ \text{ og }\ v'=\frac{1}{x}$$

Delvis integrasjon gir da

$$\int x^2\ln x\,dx=\tfrac{1}{3}x^3\ln x-\int\tfrac{1}{3}x^3\cdot\frac{1}{x}dx=$$

$$\tfrac{1}{3}x^3\ln x-\tfrac{1}{3}\int x^2dx=\tfrac{1}{3}x^3\ln x-\tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{3}x^3+C=$$

$$\underline{\underline{\tfrac{1}{3}x^3\ln x-\tfrac{1}{9}x^3+C}}=\underline{\underline{\tfrac{1}{3}x^3(\ln x-\tfrac{1}{3})+C}}=\underline{\underline{\tfrac{1}{9}x^3(3\ln x-1)+C}}$$

c) $\int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$ (*hint: bruk substitusjon*)

Her kan vi bruke følgende substitusjon:

$$u = 1 - x^2$$

som gir

$$\frac{du}{dx} = -2x$$

og

$$dx = -\frac{1}{2x}du$$

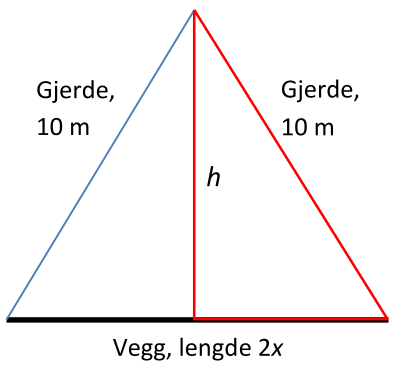
Setter vi inn dette i integralet, får vi

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int \frac{x}{\sqrt{u}}\left(-\frac{1}{2x}\right)du = -\frac{1}{2}\int u^{-\frac{1}{2}}du = -\frac{1}{2}\cdot 2u^{\frac{1}{2}} + C =$$

$$-u^{\frac{1}{2}} + C = \underline{\underline{-(1-x^2)^{\frac{1}{2}} + C}} = \underline{\underline{-\sqrt{1-x^2} + C}}$$

Oppgave 8

Det skal lages et trekantet lekeområde, som figuren nedenfor viser. Området skal ha gjerder på to sider og en vegg på den tredje side. De to sidene hvor gjerdene står skal begge være 10 meter lange. Kall lengden av veggen for 2x.



- *Finn først høyden h i trekanten uttrykt ved x. (Husk at trekanten er likebeint og at høyden derfor deler grunnlinjen i to like deler.)*

- *Finn så hvilken verdi av x som gir størst lekeområde.*

På figuren har jeg markert en rettvinklet trekant med rødt. Høyden i denne trekanten finner vi ved Pythagoras (altså fordi det er en rettvinklet trekant):

$$h^2 + x^2 = 10^2$$

som gir

$$h^2 = 10^2 - x^2 = 100 - x^2$$

og altså

$$h=\sqrt{100-x^2}$$

Arealet av lekeområdet er

$$A(x)=\frac{1}{2}gh=\frac{1}{2}\cdot 2x\cdot\sqrt{100-x^2}=x\cdot\sqrt{100-x^2}=x(100-x^2)^{\frac{1}{2}}$$

For å finne hvilken x-verdi som gjør denne maksimal, kan vi derivere uttrykket og sette det lik 0 (vi må huske å bruke produktregelen og kjerneregelen når vi deriverer):

$$A'(x)=1\cdot(100-x^2)^{\frac{1}{2}}+x\cdot\frac{1}{2}(100-x^2)^{\frac{1}{2}-1}\cdot(100-x^2)'=$$

$$(100-x^2)^{\frac{1}{2}}+\frac{x}{2}(100-x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x)=$$

$$\underline{(100-x^2)^{\frac{1}{2}}-x^2(100-x^2)^{-\frac{1}{2}}}$$

Setter vi denne lik 0, får vi

$$A'(x)=0$$

dvs.

$$(100-x^2)^{\frac{1}{2}}-x^2(100-x^2)^{-\frac{1}{2}}=0$$

Flytter over det siste leddet til høyre side:

$$(100-x^2)^{\frac{1}{2}}=x^2(100-x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

Hvis vi nå ganger begge sider med $(100-x^2)^{\frac{1}{2}}$, får vi

$$(100-x^2)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}=x^2(100-x^2)^{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}$$

$$(100-x^2)^1=x^2(100-x^2)^0$$

$$100-x^2=x^2$$

$$2x^2=100$$

$$x^2=50$$

$$x=\sqrt{50}$$

Konklusjon: Vi får størst lekeområde dersom $\underline{\underline{x=\sqrt{50}\ m}}$ $\approx$ 7.07 m.