

EKSAMEN – Ny og utsatt

Løsningsforslag

Emnekode: ITD15013	Emne: Matematikk 1 – første deleksamen
Dato: 4. juni 2015	Eksamenstid: 09.00 – 12.00
Hjelpemidler: - To A4-ark med valgfritt innhold på begge sider. - Formelhefte. Kalkulator er ikke tillatt .	Faglærer: Christian F Heide
Eksamensoppgaven: Oppgavesettet består av 5 sider inklusiv denne forsiden og et vedlegg på én side. Kontroller at oppgavesettet er komplett. Oppgavesettet består av 14 oppgaver. Ved sensur vil alle oppgaver telle like mye. Der det er mulig skal du: • vise utregninger og hvordan du kommer fram til svarene • begrunne dine svar, selv om dette ikke er eksplisitt sagt i hvert spørsmål	
Sensurdato: Torsdag 25. juni 2015 Karakterene er tilgjengelige for studenter på studentweb senest 2 virkedager etter oppgitt sensurfrist. Følg instruksjoner gitt på: www.hiof.no/studentweb	

Oppgave 1

To punkter i $\mathbb{R}^3$ er gitt ved koordinatene $P(-4, 2, 3)$ og $Q(-2, 1, 5)$. Finn avstanden mellom punktene P og Q .

Avstanden mellom punktene P og Q er lik lengden av vektoren $\overrightarrow{PQ}$. Vi finner

$$\overrightarrow{PQ} = (-2 - (-4)) \cdot \mathbf{i} + (1 - 2) \cdot \mathbf{j} + (5 - 3) \cdot \mathbf{k} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$$

Lengden av denne vektoren er

$$|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PQ}} = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{4 + 1 + 4} = \sqrt{9} = \underline{\underline{3}}$$

Oppgave 2

Gitt følgende vektorer i $\mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{v} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

$$\mathbf{w} = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$$

Finn $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$.

$$\mathbf{v} \times \mathbf{w} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} k =$$

$$((-3) \cdot (-1) - (1 \cdot 2)) \cdot \mathbf{i} - (2 \cdot (-1) - 1 \cdot (-1)) \cdot \mathbf{j} + (2 \cdot 2 - (-3) \cdot (-1)) \cdot \mathbf{k} =$$

$$\underline{\underline{\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}}}$$

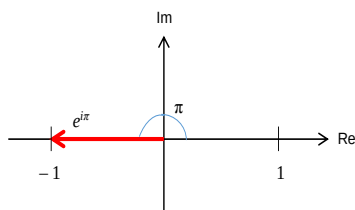
Oppgave 3

Gitt det komplekse tallet

$$z = e^{i\pi} + e^{i\frac{\pi}{3}} \cdot e^{i\frac{\pi}{6}}$$

Skriv tallet z på kartesisk form.

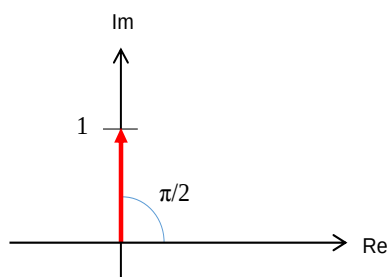
Det første leddet $e^{i\pi}$ lik -1 . Dette kan vi også se dersom vi tegner tallet i det komplekse planet (eller vi kan regne ut ved å bruke at $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$):



Det andre leddet i summen er

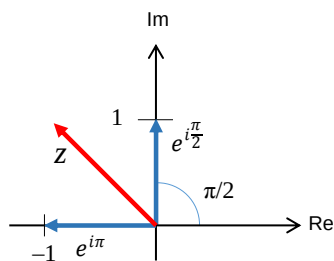
$$e^{i\frac{\pi}{3}} \cdot e^{i\frac{\pi}{6}} = e^{i(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6})} = e^{i(\frac{2\pi}{6} + \frac{\pi}{6})} = e^{i\frac{3\pi}{6}} = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

Dette er lik i . Hvis man ikke ser dette, kan det være en hjelp i å tegne det i det komplekse planet:



Vi ser av figuren at dette tallet er i .

Så skal vi addere disse to tallene for å finne z . Tegner vi dette i det komplekse planet blir det slik, hvor den røde pilen er z :



z er følgelig

$$\underline{\underline{z = -1 + i}}$$

Oppgave 4

Funksjonen f er definert ved

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{\sin 2x} - 1}{x} & \text{når } x \neq 0 \\ 0 & \text{når } x = 0 \end{cases}$$

Er funksjonen kontinuert i $x = 0$? Begrunn svaret.

For at funksjonen skal være kontinuert i $x = 0$, må

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$$

Her er $f(0) = 0$, så for at funksjonen skal være kontinuert må $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$. Vi ser derfor på denne grenseverdien:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin 2x} - 1}{x}$$

Vi vet at $\sin 0 = 0$. Derfor er $\sin 2x = 0$ når $x = 0$. Dette gjør at $e^{\sin 2x} = e^0 = 1$ når $x = 0$, dvs. at telleren går mot 0 når x går mot 0. Nevneren går også mot 0 når x går mot 0. Vi har derfor et 0/0-uttrykk og kan bruke l'Hôpitals regel for å finne denne grenseverdien:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin 2x} - 1}{x} \stackrel{l'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos 2x \cdot e^{\sin 2x}}{1} = 2 \cdot \cos 0 \cdot e^{\sin 0} = 2 \cdot 1 \cdot 1 = 2$$

Vi ser at $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \neq f(0)$.

Funksjonen f er derfor **ikke** kontinuert i $x = 0$.

Oppgave 5

Finn eventuelle asymptoter til følgende funksjon:

$$f(x) = \frac{2x^3 - 1}{x^2 - 4}$$

Funksjonen kan ha vertikale asymptoter der nevneren er 0. Vi sjekker disse:

$$x^2 - 4 = 0$$

som gir

$$x = 2 \quad \vee \quad x = -2$$

Vi må sjekke om disse gjør at telleren også blir null (i så fall får vi et ubestemt uttrykk som må sjekkes spesielt, f. eks. med l'Hôpitals regel). Her ser vi at ingen av disse x verdiene gjør telleren lik 0, og funksjonen har derfor vertikale asymptoter for $x = -2$ og $x = 2$.

Videre ser vi at graden til telleren er én høyere enn graden til nevneren. Dette gjør at funksjonen har skråasymptoter. Vi kan gjøre en polynomdivisjon for å finne disse:

$$\begin{array}{r} (2x^3 - 1) : (x^2 - 4) = 2x \\ - (2x^3 - 8x) \\ \hline 8x - 1 \end{array}$$

Funksjonen kan følgelig skrives slik

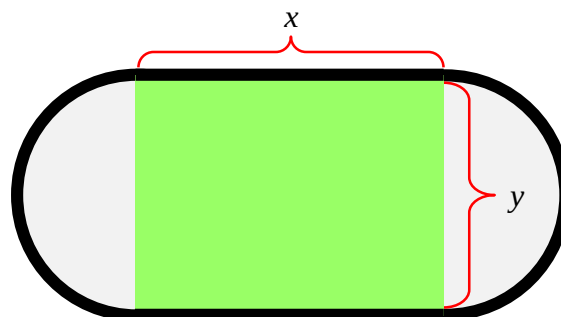
$$f(x) = 2x + \frac{8x - 1}{x^2 - 4}$$

Vi ser at når x går mot uendelig vil det siste leddet gå mot 0, og funksjonen vil derfor asymptotisk nærme seg $2x$. Følgelig vil $y = 2x$ være en skråasymptote for funksjonen.

Funksjonen har ingen horisontale asymptoter.

Oppgave 6

Et stadion skal designes. Løpebanen (markert med svart på figuren nedenfor) skal som vanlig bestå av to langsider forbundet med svinger. Langsidene skal være rette linjer av lengde x . Svingene skal bestå av halvsirkler med diameter y , som vist på figuren. Innenfor løpebanen skal det også være en rektangulær gressplen. Denne er markert med grønn farge i figuren. Gressplenens får da en lengde x og en bredde y .



En runde på løpebanen skal være 400 meter. Vi ønsker imidlertid å designe stadionet slik at arealet av gressplenens blir så stort som mulig.

Forklar at lengden av løpebanen er gitt ved $\pi y + 2x$, og finn så den verdien av x vi bør velge for at gressplenens skal få maksimalt areal.

Lengden av hver av de to rette strekningene er x , og siden det er en rett strekning på hver side av banen, blir dette til sammen $2x$. Omkretsen av en sirkel er πD (eller $2\pi r$). Her består banen av to halve sirkler som svinger, så til sammen blir dette en hel sirkelomkrets, altså πD . Diameteren er her y . De to svingene blir derfor til sammen πy . Til sammen blir derfor lengden av løpebanen $\pi y + 2x$.

Arealet av gressplen er $A = x \cdot y$.

Løpebanen skal være 400 meter, og vi må altså kreve $\pi y + 2x = 400$. Ved hjelp av dette kan vi uttrykke y ved hjelp av x :

$$\pi y + 2x = 400$$

$$\Downarrow$$

$$\pi y = 400 - 2x$$

$$\Downarrow$$

$$y = \frac{400}{\pi} - \frac{2}{\pi}x$$

Setter vi så dette inn i uttrykket for arealet, får vi en funksjon for arealet som kun avhenger av x :

$$A(x) = x \cdot \left(\frac{400}{\pi} - \frac{2}{\pi}x \right) = \frac{400}{\pi}x - \frac{2}{\pi}x^2$$

For å finne den verdien av x som gjør denne maksimal, kan vi derivere og vurdere de kritiske punkter vi da finner.

$$A'(x) = \frac{400}{\pi} - 2 \cdot \frac{2}{\pi}x = \frac{400}{\pi} - \frac{4}{\pi}x = \frac{4}{\pi}(100 - x)$$

Vi finner kritiske punkter ved

$$A'(x) = 0$$

som gir

$$\frac{4}{\pi}(100 - x) = 0$$

dvs.

$$100 - x = 0$$

og altså

$$x = 100$$

$A(x)$ har følgelig et kritisk punkt for $x = 100$.

Vi ser av uttrykket for $A'(x)$ at dersom $x < 100$ så vil $A'(x)$ være positiv, mens dersom $x > 100$ så vil $A'(x)$ være negativ. $x = 100$ er følgelig et toppunkt for funksjonen $A(x)$, og vi kan konkludere at arealet av gressplen er størst når $x = 100$ meter.

Oppgave 7

Deriver følgende funksjon.

$$f(x) = \sqrt{x} \cdot (1 - \cos x)$$

Det kan være lettere å derivere (og integrere) dersom vi skriver rot som eksponent, altså slik:

$$f(x) = x^{\frac{1}{2}} \cdot (1 - \cos x)$$

I tillegg må vi bruke regelen for derivasjon av et produkt:

$$(uv)' = u'v + uv'$$

Gjør vi dette, finner vi

$$f'(x) = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} \cdot (1 - \cos x) + x^{\frac{1}{2}} \cdot (0 - (-\sin x)) =$$

$$\frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} \cdot (1 - \cos x) + x^{\frac{1}{2}} \cdot \sin x =$$

$$\frac{1 - \cos x}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x} \cdot \sin x =$$

$$\frac{1 - \cos x + 2x \sin x}{2\sqrt{x}}$$

Oppgave 8

Deriver følgende funksjon. Hint: benytt logaritmisk derivasjon.

$$f(x) = x^{\cos x}$$

Før vi deriverer tar vi logaritmen til uttrykket:

$$\ln f(x) = \ln x^{\cos x}$$

På høyre side bruker vi nå regelen $\ln a^b = b \ln a$ og får:

$$\ln f(x) = \cos x \cdot \ln x$$

Deriverer vi nå begge sider, får vi (vi må bruke regelen for derivasjon av et produkt for å derivere høyre side):

$$\frac{1}{f(x)} f'(x) = (-\sin x) \cdot \ln x + \cos x \cdot \frac{1}{x}$$

Så ganger vi begge sider med $f(x)$ og får

$$f'(x) = \left((-\sin x) \cdot \ln x + \cos x \cdot \frac{1}{x} \right) \cdot f(x) =$$

$$\underline{\underline{\left(\frac{\cos x}{x} - \sin x \cdot \ln x \right) \cdot x^{\cos x} =}}$$

$$\underline{\underline{(\cos x - x \cdot \sin x \cdot \ln x) \cdot x^{\cos x - 1}}}$$

Oppgave 9

Følgende ligning beskriver en kurve i planet:

$$x(y+1) + e^y = 2$$

Vis at punktet $(1, 0)$ ligger på kurven, og finn ligningen til kurvens tangent i dette punktet.

Vi kan vise at punktet $(1, 0)$ ligger på kurven ved å vise at $x = 1$ og $y = 0$ oppfyller ligningen, altså at venstre side blir lik 2. Venstre side av ligningen blir

$$1(0+1) + e^0 = 1+1 = 2$$

Vi ser at ligningen er oppfylt, og punktet $(1, 0)$ ligger følgelig på kurven.

For å finne tangenten i dette punktet må vi foreta en implisitt derivasjon av uttrykket. Vi må derivere det første leddet som et produkt:

$$1 \cdot (y+1) + x \cdot y' + e^y \cdot y' = 0$$

Vi ordner uttrykket slik at alt som inneholder y' kommer på venstre side og resten på høyre side:

$$xy' + e^y y' = -y - 1$$

Vi tar så y' utenfor parentes på venstre side:

$$(x + e^y)y' = -y - 1$$

Så deler vi med $x + e^y$ på begge sider og får følgende uttrykk for y' :

$$y' = \frac{-y-1}{x+e^y}$$

Den deriverte gir stigningstallet til tangenten. Setter vi inn $x = 1$ og $y = 0$ i dette uttrykket for den deriverte, finner vi stigningstallet til tangenten i punktet $(1, 0)$:

$$y'(1, 0) = \frac{-0-1}{1+e^0} = \frac{-1}{1+1} = -\frac{1}{2}$$

Vi kan så bruke ettpunktsformelen for finne ligningen til tangenten. Ettpunktsformelen er slik:

$$y - y_0 = a(x - x_0)$$

med (x_0, y_0) som kjent punkt på linja og a som stigningstall. Setter vi inn $x_0 = 1$, $y_0 = 0$ og $a = -\frac{1}{2}$, får vi

$$y - 0 = -\frac{1}{2}(x - 1)$$

som gir

$$\underline{\underline{y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}}}$$

Oppgave 10

En funksjon f er definert på intervallet $[0, 1]$ ved

$$f(x) = e^{-x^2}$$

Denne funksjonen har en invers funksjon, f^{-1} . Finn definisjonsmengden og funksjonsuttrykket til denne inverse funksjonen.

Definisjonsmengden til den inverse funksjonen er lik verdimengden til funksjonen selv, altså $D_{f^{-1}} = V_f$. Verdimengden til f er de verdier f kan anta, og disse strekker seg fra

$$f(0) = e^{-0^2} = 1 \text{ til } f(1) = e^{-1^2} = e^{-1} = \frac{1}{e} \approx 0,37. \text{ Følgelig er definisjonsmengden til } f^{-1}$$

$$\underline{\underline{D_{f^{-1}} = [e^{-1}, 1]}}$$

Funksjonsuttrykket for den inverse funksjonen finner vi ved å løse $y = e^{-x^2}$ med hensyn på x .

Mange synes det er enklere å bytte om på x og y før vi begynner, slik at vi får $x = e^{-y^2}$ og løser denne med hensyn på y :

$$x = e^{-y^2}$$

$$\Updownarrow$$

$$\ln x = \ln e^{-y^2}$$

$$\Updownarrow$$

$$\ln x = -y^2 \cdot \ln e$$

$$\Updownarrow$$

$$\ln x = -y^2$$

$$\Updownarrow$$

$$y^2 = -\ln x$$

$$\Updownarrow$$

$$y = \pm \sqrt{-\ln x}$$

Siden vi vet at verdimengden kun består av positive tall, kan vi utelukke den negative løsningen, og står igjen med

$$\underline{\underline{f^{-1}(x) = \sqrt{-\ln x}}}$$

Oppgave 11

Finn følgende ubestemte integral

$$\int (1-x^2) e^x dx$$

Her vil det være lurt å integrere ved hjelp av delvis integrasjon. Vi velger

$$u' = e^x \quad \text{og} \quad v = 1 - x^2$$

som gir

$$u = e^x \quad \text{og} \quad v' = -2x$$

Regelen for delvis integrasjon kan skrives slik:

$$\int u'v \, dx = uv - \int uv' \, dx$$

Bruker vi denne regelen, får vi

$$\begin{aligned} \int (1-x^2)e^x \, dx &= (1-x^2)e^x - \int e^x(-2x) \, dx \\ &= (1-x^2)e^x + 2 \int xe^x \, dx \end{aligned} \quad (*)$$

Det nye integralet vi har fått her, $\int xe^x \, dx$, må vi igjen bruke delvis integrasjon på. Her velger vi

$$u' = e^x \quad \text{og} \quad v = x$$

som gir

$$u = e^x \quad \text{og} \quad v' = 1$$

Vi får da

$$\int xe^x \, dx = xe^x - \int e^x \, dx = xe^x - e^x + C_1$$

Bruker vi så dette i uttrykket (*) ovenfor, får vi

$$\begin{aligned} \int (1-x^2)e^x \, dx &= (1-x^2)e^x + 2(xe^x - e^x + C_1) \\ &= e^x - x^2e^x + 2xe^x - 2e^x + 2C_1 \\ &= -x^2e^x + 2xe^x - e^x + C \\ &= \underline{\underline{(-x^2 + 2x - 1)e^x + C}} \\ &= \underline{\underline{-(x-1)^2e^x + C}} \end{aligned}$$

Oppgave 12

Finn følgende ubestemte integral

$$\int e^x \sqrt{1+e^x} \, dx \quad (\text{Hint: bruk substitusjon})$$

Her kan vi bruke substitusjonen

$$u = 1 + e^x$$

som gir

$$\frac{du}{dx} = e^x$$

og altså

$$dx = \frac{1}{e^x} du$$

Setter vi inn dette i integralet, får vi

$$\begin{aligned}\int e^x \sqrt{1+e^x} dx &= \int e^x \cdot \sqrt{u} \cdot \frac{1}{e^x} du = \int \sqrt{u} du = \int u^{\frac{1}{2}} du = \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} + C \\ &= \underline{\underline{\frac{2}{3} (1+e^x)^{\frac{3}{2}} + C}}\end{aligned}$$

Oppgave 13

En funksjon av to variable er gitt ved

$$z = f(x, y) = 2x^3y + xy^3 - 3x^2 + y$$

og er definert for alle reelle x og y .

Finn de partiellderivate av 1. og 2. orden, altså

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \text{ og } \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

Her finner vi:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6x^2y + y^3 - 6x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2x^3 + 3xy^2 + 1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} (6x^2y + y^3 - 6x) = 6x^2 + 3y^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} (2x^3 + 3xy^2 + 1) = 6x^2 + 3y^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} (6x^2y + y^3 - 6x) = 12xy - 6$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} (2x^3 + 3xy^2 + 1) = 6xy$$