

EKSAMEN – Ny og utsatt

Løsningsforslag

Emnekode: ITD15013	Emne: Matematikk 1, deleksamen 1
Dato: 2. juni 2014	Eksamenstid: 09.00 – 12.00
Hjelpemidler: To A4-ark med valgfritt innhold på begge sider. Formelhefte. Kalkulator er ikke tillatt .	Faglærer: Christian F Heide
Eksamensoppgaven: Oppgavesettet består av fire sider inklusiv denne forsiden og et vedlegg på én side. Kontroller at oppgaven er komplett før du begynner å besvare spørsmålene. Oppgavesettet består av åtte oppgaver med i alt 12 deloppgaver. Ved sensur vil alle deloppgaver telle omtrent like mye. Der det er mulig skal du: • vise utregninger og hvordan du kommer fram til svarene • begrunne dine svar, selv om dette ikke er eksplisitt sagt i hvert spørsmål	
Sensurdato: 25. juni 2014 Karakterene er tilgjengelige for studenter på studentweb senest 2 virkedager etter oppgitt sensurfrist. Følg instruksjoner gitt på: www.hiof.no/studentweb	

Oppgave 1

Gitt følgende vektorer i det euklidske rommet $\mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{u} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$$

$$\mathbf{v} = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$$

Finn $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$.

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 3 \cdot (-1) + (-1) \cdot 2 + 1 \cdot 2 = -3 - 2 + 2 = \underline{\underline{-3}}$$

Oppgave 2

Gitt de komplekse tallene $z = 2 - 2\sqrt{3}i$ og $w = 1 + \sqrt{3}i$.

a) Finn $\frac{z}{w}$. Skriv svaret på formen $a + bi$.

$$\begin{aligned}\frac{z}{w} &= \frac{2 - 2\sqrt{3}i}{1 + \sqrt{3}i} \cdot \frac{1 - \sqrt{3}i}{1 - \sqrt{3}i} = \frac{2 \cdot 1 + 2 \cdot (-\sqrt{3}i) - 2\sqrt{3}i \cdot 1 - 2\sqrt{3}i \cdot (-\sqrt{3}i)}{1^2 + \sqrt{3}^2} \\ &= \frac{2 - 2\sqrt{3}i - 2\sqrt{3}i + 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} \cdot i^2}{1 + 3} = \frac{2 - 4\sqrt{3}i + 2 \cdot 3 \cdot (-1)}{4} \\ &= \frac{2 - 6 - 4\sqrt{3}i}{4} = \frac{-4 - 4\sqrt{3}i}{4} = \frac{-4}{4} + \frac{-4\sqrt{3}i}{4} \\ &= \underline{\underline{-1 - \sqrt{3}i}}\end{aligned}$$

b) Skriv tallet w på eksponentialform.

Modulus (lengden av tallet) er gitt ved

$$|w| = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{1 + 3} = \sqrt{4} = 2$$

Argumentet (vinkelen) er gitt ved

$$\cos \varphi = \frac{\operatorname{Re}(w)}{|w|} = \frac{1}{2}$$

som gir

$$\varphi = \cos^{-1} \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3} \quad \vee \quad \varphi = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$$

Fordi både realdel og imaginærdel er positive ligger w i 1. kvadrant, og følgelig er

$$\varphi = \frac{\pi}{3}$$

w skrevet på eksponentialform blir derfor

$$\underline{\underline{w = 2e^{\frac{\pi}{3}i}}}$$

Oppgave 3

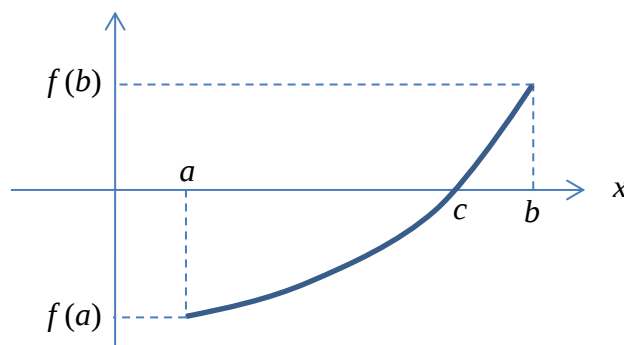
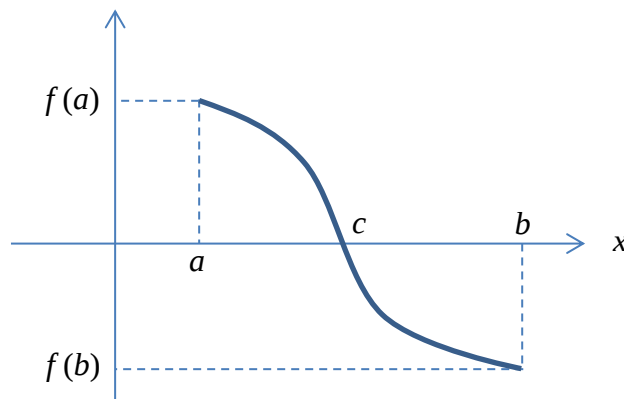
I læreboka finner vi følgende teorem som ofte kalles skjæringssetningen:

La f være en kontinuerlig funksjon definert på intervallet $[a, b]$.

Dersom $f(a)$ og $f(b)$ har forskjellig fortegn, så finnes det en c mellom a og b slik at $f(c) = 0$.

Forklar hvorfor denne setningen kalles skjæringssetningen. Lag gjerne en illustrasjon som støtte for din forklaring.

Dersom $f(a)$ og $f(b)$ har forskjellig fortegn betyr det at det ene endepunktet til grafen må ligge over x -aksen, mens det andre ligger under. Vi har vist to muligheter i figurene nedenfor.



Dersom grafen skal kunne komme seg fra en positiv verdi til en negativ verdi, må den ett eller annet sted passere 0. Det samme er tilfellet dersom den skal komme seg fra en negativ verdi til en positiv verdi. Det er nettopp dette skjæringssetningen sier. Ett eller annet sted mellom endepunktene (altså minst ett sted) må den være 0. Dette stedet kalles $x = c$ i setningen.

Den kalles altså skjæringssetningen fordi den sier at grafen vil skjære x -aksen ett eller annet sted mellom $x = a$ og $x = b$.

Oppgave 4

Gjør en forenkling av følgende uttrykk:

$$e^{\ln 4} \cdot e^{5 \ln x}$$

Siden e^x og $\ln x$ er inverse (omvendte) funksjoner, vil de «oppheve hverandre». Det vil blant annet si at $e^{\ln a} = a$. Videre er det slik at $\ln a^b = b \ln a$. Bruker vi disse to fakta, kan vi forenkle på følgende måte:

$$e^{\ln 4} \cdot e^{5 \ln x} = 4 \cdot e^{\ln x^5} = \underline{\underline{4x^5}}$$

Oppgave 5

Finn den deriverte av følgende funksjon:

$$f(x) = x^{x+1} \quad (\text{Hint: benytt logaritmisk derivasjon})$$

Vi tar logaritmen på begge sider og får

$$\ln f = \ln x^{x+1}$$

Vi benytter så at $\ln x^{x+1} = (x+1) \cdot \ln x$:

$$\ln f = (x+1) \ln x \quad (*)$$

Vi deriverer begge sider. Her bruker derivasjonsregelen $(\ln x)' = \frac{1}{x}$. Men siden f er en funksjon av x , må vi på venstre side av uttrykket (*) også bruke kjerneregelen som sier at vi må gange med den deriverte av kjernen, slik at

$$(\ln f)' = \frac{1}{f} \cdot f'$$

På høyre side av uttrykket (*) må vi bruke produktregelen som sier at $(uv)' = u'v + uv'$. Den deriverte av uttrykket (*) blir da

$$\frac{1}{f} \cdot f' = (x+1)' \cdot \ln x + (x+1) \cdot (\ln x)'$$

som gir

$$\frac{1}{f} \cdot f' = 1 \cdot \ln x + (x+1) \cdot \frac{1}{x}$$

$$\frac{1}{f} \cdot f' = \ln x + 1 + \frac{1}{x}$$

$$f' = f(x) \cdot \left(\ln x + 1 + \frac{1}{x} \right) = x^{x+1} \cdot \left(\ln x + 1 + \frac{1}{x} \right)$$

Hvis vi vil kan vi ved å bruke at $x^{x+1} = x^x \cdot x$ skrive dette som

$$f'(x) = x^x \cdot x \cdot \left(\ln x + 1 + \frac{1}{x} \right) = \underline{\underline{x^x \cdot (x \ln x + x + 1)}}$$

Oppgave 6

Finn følgende grenseverdier dersom de eksisterer.

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 - 6x^2 - 2x + 3}{2x^3 - 4x}$

Her kan vi forsøke å dele alle ledd med x^3 siden leddet med høyest grad har grad 3:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 - 6x^2 - 2x + 3}{2x^3 - 4x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{3x^3}{x^3} - \frac{6x^2}{x^3} - \frac{2x}{x^3} + \frac{3}{x^3}}{\frac{2x^3}{x^3} - \frac{4x}{x^3}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 - \frac{6}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3}}{2 - \frac{4}{x^2}} = \underline{\underline{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

(Den siste likheten skyldes at når x går mot uendelig vil alle ledd som x i nevneren gå mot 0, og vi står derfor igjen med 3 i telleren og 2 i nevneren).

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x^2)}{x^4}$

Vi ser at når x går mot 0 så går telleren mot 0 fordi $\cos 0 = 1$. Nevneren går også mot 0 når x går mot 0. Uttrykket er derfor et ubestemt $\frac{0}{0}$ -uttrykk. Vi kan da bruke l'Hôpitals regel som tillater oss å derivere teller og nevner i et slikt uttrykk uten at grenseverdien endres:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x^2)}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0 - (-\sin(x^2)) \cdot 2x}{4x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cdot \sin(x^2)}{4x^3}$$

Her har vi brukt kjerneregelen ved derivasjonen av telleren. Vi må nå forkorte $2x$ i telleren mot tilsvarende faktorer i nevneren, og får

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2)}{2x^2}$$

Her har vi igjen fått et $\frac{0}{0}$ -uttrykk og kan bruke l'Hôpitals regel på nytt:

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x^2) \cdot (2x)}{4x}$$

Igen kan vi forkorte $2x$ i telleren mot tilsvarende faktor i nevneren, og får

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x^2)}{2} = \frac{\cos 0}{2} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

Oppgave 7

En funksjon av to variable er gitt ved

$$z = f(x, y) = 3x^2 - y^2$$

Funksjonen er definert for alle reelle x og y .

Finn $\frac{\partial f}{\partial x}$ og $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Når vi partiellderiverer med hensyn på x , betrakter vi y som en konstant under derivasjonen. Vi får derfor

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = 2 \cdot 3x^{2-1} - 0 = \underline{\underline{6x}}$$

Tilsvarende får vi

$$f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = 0 - 2y^{2-1} = \underline{\underline{-2y}}$$

Oppgave 8

Finn følgende ubestemte integraler:

a) $\int \left(x^5 - 5x^4 + e^{3x} - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \cos x \right) dx$

Her kan vi bruke integrasjonsreglene direkte. Når vi skal integrere $\frac{1}{x^2}$ kan det

være lettere dersom vi tenker på at $\frac{1}{x^2} = x^{-2}$:

$$\begin{aligned} \int \left(x^5 - 5x^4 + e^{3x} - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \cos x \right) dx \\ = \underline{\underline{\frac{1}{6}x^6 - x^5 + \frac{1}{3}e^{3x} - \ln|x| - x^{-1} + \sin x + C}} \end{aligned}$$

b) $\int x^2 \sin x \, dx$

Her må vi bruke delvis integrasjon. Vi velger å kalle

$$u' = \sin x \quad \text{og} \quad v = x^2$$

som gir

$$u = -\cos x \quad \text{og} \quad v' = 2x$$

Regelen for delvis integrasjon er slik:

$$\int u'v \, dx = uv - \int uv' \, dx$$

Bruker vi dette får vi

$$\begin{aligned} \int x^2 \sin x \, dx &= (-\cos x)x^2 - \int (-\cos x)2x \, dx \\ &= -x^2 \cos x + 2 \int x \cos x \, dx \end{aligned}$$

For å finne integralet $\int x \cos x \, dx$ må vi igjen bruke delvis integrasjon. Vi velger her

$$u' = \cos x \quad \text{og} \quad v = x$$

som gir

$$u = \sin x \quad \text{og} \quad v' = 1$$

Bruker vi dette sammen med regelen for delvis integrasjon får vi

$$\int x \cos x \, dx = x \sin x - \int \sin x \cdot 1 \, dx = \underline{x \sin x + \cos x + C}$$

Sammen med resultatet ovenfor gir dette

$$\begin{aligned} \int x^2 \sin x \, dx &= -x^2 \cos x + 2 \int x \cos x \, dx \\ &= -x^2 \cos x + 2(x \sin x + \cos x + C_1) \\ &= -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + 2C_1 \\ &= \underline{\underline{(2 - x^2) \cos x + 2x \sin x + C}} \end{aligned}$$

c) $\int \frac{4}{x^2 - 2x - 3} \, dx$

Her kan vi forsøke å delbrøkkoppspalte integranden. Vi faktorerer først nevneren:

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2}$$

$$x = \frac{2+4}{2} = 3 \quad \vee \quad x = \frac{2-4}{2} = -1$$

Dette betyr at vi kan faktorisere nevneren slik:

$$x^2 - 2x - 3 = (x - 3)(x + 1)$$

Vi kan nå gjøre en delbrøkoppstilling:

$$\frac{4}{x^2 - 2x - 3} = \frac{A}{x - 3} + \frac{B}{x + 1}$$

Vi ganger så dette uttrykket med $(x - 3)(x + 1)$:

$$\frac{4}{x^2 - 2x - 3}(x - 3)(x + 1) = \frac{A}{x - 3}(x - 3)(x + 1) + \frac{B}{x + 1}(x - 3)(x + 1)$$

Vi forkorter det vi kan og får

$$4 = A \cdot (x + 1) + B \cdot (x - 3)$$

Så setter vi inn $x = 3$ i dette uttrykket:

$$4 = A \cdot (3 + 1) + B \cdot (3 - 3)$$

som gir

$$4 = A \cdot 4 + B \cdot 0$$

Altså $A = 1$.

Så setter vi inn $x = -1$ i uttrykket ovenfor:

$$4 = A \cdot (-1 + 1) + B \cdot (-1 - 3)$$

som gir

$$4 = A \cdot 0 + B \cdot (-4)$$

Altså $B = -1$.

Vi kan altså spalte integranden slik:

$$\frac{4}{x^2 - 2x - 3} = \frac{1}{x - 3} - \frac{1}{x + 1}$$

og vi kan da integrere direkte ved å bruke regelen som sier at

$$\int f(x + a) dx = F(x + a) + C$$

Dette gir

$$\int \frac{4}{x^2 - 2x - 3} dx = \int \left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x+1} \right) dx = \int \frac{1}{x-3} dx - \int \frac{1}{x+1} dx$$

$$= \underline{\underline{\ln|x-3| - \ln|x+1| + C}}$$