

Matematikk 1

Første deleksamen

14. desember 2018

Løsningsforslag

Christian F. Heide

December 14, 2018

OPPGAVE 1

En trekant ABC i det euklidske rommet $\mathbb{R}^3$ er definert ved følgende hjørner:

$A(0, 2, -1)$

$B(-1, 0, 3)$ og

$C(3, 4, 1)$.

Bestem vinkel A i denne trekanten.

Oppgi svaret både i grader og radianer.

Vinkel A er vinkelen mellom vektorene $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AC}$. Vi kan finne denne ved hjelp av skalarprodukt:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \cos A$$

som gir

$$\cos A = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|}$$

Vi må finne de to vektorene $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AB} = (-1 - 0)\mathbf{i} + (0 - 2)\mathbf{j} + (3 - (-1))\mathbf{k} = -\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$$

$$\overrightarrow{AC} = (3 - 0)\mathbf{i} + (4 - 2)\mathbf{j} + (1 - (-1))\mathbf{k} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$$

Skalarproduktet av disse vektorene er

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (-1) \cdot 3 + (-2) \cdot 2 + 4 \cdot 2 = -3 - 4 + 8 = \underline{1}$$

Lengdene av vektorene er

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + 4^2} = \sqrt{1 + 4 + 16} = \underline{\sqrt{21}}$$

$$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{3^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{9 + 4 + 4} = \underline{\sqrt{17}}$$

Vinkelen er følgelig gitt ved

$$\cos A = \frac{1}{\sqrt{21} \cdot \sqrt{17}}$$

som gir

$$A = \arccos \frac{1}{\sqrt{21} \cdot \sqrt{17}} = \underline{\underline{86.97^\circ}}$$

I radianer:

$$A = \frac{86.97^\circ}{180^\circ} \cdot \pi = \underline{\underline{1.5178}}$$

OPPGAVE 2

a) Skriv følgende komplekse tall på rektangulær form, altså på formen $a + bi$:

$$w = (2 + i)^2$$

$$w = (2 + i)^2 = (2 + i)(2 + i) = 4 + 2i + 2i + i^2 = 4 + 4i - 1 = \underline{\underline{3 + 4i}}$$

b) Finn realdel og imaginærdel til følgende komplekse tall:

$$z = \frac{2 - 3i}{(2 + i)^2}$$

Vi vet fra spørsmål a at $(2+i)^2 = 3+4i$. z kan altså skrives slik:

$$z = \frac{2-3i}{(2+i)^2} = \frac{2-3i}{3+4i}$$

Vi ganger i teller og nevner med den komplekskonjugerte av nevneren, og får:

$$z = \frac{2-3i}{3+4i} \cdot \frac{3-4i}{3-4i} = \frac{6-8i-9i+12i^2}{3^2+4^2} = \frac{6-17i-12}{9+16} = \frac{-6-17i}{25} =$$

$$\underline{\underline{-\frac{6}{25} - \frac{17}{25}i}}$$

Følgelig har vi:

$$\underline{\underline{\operatorname{Re}(z) = -\frac{6}{25}}}$$

og

$$\underline{\underline{\operatorname{Im}(z) = -\frac{17}{25}}}$$

OPPGAVE 3

En kurve i planet er definert ved følgende ligning:

$$x^2 y^3 + y e^{-x} = x + 3$$

a) *Vis at punktet $(0,3)$ ligger på kurven.*

Vi setter inn $x = 0$ og $y = 3$ i ligningen og sjekker om venstre side er lik høyre side.

Venstre side: $0^2 \cdot 3^3 + 3e^{-0} = 0 + 3 \cdot 1 = 3$

Høyre side: $0 + 3 = 3$

Vi ser at venstre side er lik høyre side. Punktet ligger følgelig på kurven.

b) *Finn ligningen for tangenten til kurven i dette punktet.*

Vi må utføre en implisitt derivasjon:

$$2x \cdot y^3 + x^2 \cdot 3y^2 \cdot y' + y' \cdot e^{-x} + y e^{-x} \cdot (-1) = 1 + 0$$

Vi flytter alt som ikke inneholder y' over på høyre side:

$$3x^2 y^2 y' + y' e^{-x} = 1 - 2xy^3 + y e^{-x}$$

Vi trekker y' på utsiden av en parentes:

$$(3x^2y^2 + e^{-x})y' = 1 - 2xy^3 + ye^{-x}$$

Vi deler på begge sider av likhetstegnet med uttrykket i parentesen for å finne et uttrykk for y' :

$$y' = \frac{1 - 2xy^3 + ye^{-x}}{3x^2y^2 + e^{-x}}$$

Vi setter så inn $x = 0$ og $y = 3$ i dette uttrykket for å finne stigningstallet til tangenten i dette punktet:

$$y'(0,3) = \frac{1 - 2 \cdot 0 \cdot 3^3 + 3e^{-0}}{3 \cdot 0^2 \cdot 3^2 + e^{-0}} = \frac{1 - 0 + 3}{0 + 1} = \frac{4}{1} = 4$$

Vi kan så bruke ettpunktsformelen for å finne ligningen for tangenten i punktet:

$$y - y_0 = a(x - x_0)$$

$$y - 3 = 4(x - 0)$$

som gir

$$\underline{\underline{y = 4x + 3}}$$

OPPGAVE 4

Bestem følgende grenseverdi dersom den eksisterer. Grenseverdien skal bestemmes ved å bruke l'Hôpitals regel - ikke ved å regne ut på kalkulator.

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2^x - \frac{1}{2}}{x^2 - 1}$$

Vi ser at dersom $x = -1$ blir telleren $2^{-1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$. Nevneren blir $(-1)^2 - 1 = 1 - 1 = 0$. Vi får altså et $\frac{0}{0}$ -uttrykk, og kan bruke l'Hôpitals regel:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2^x - \frac{1}{2}}{x^2 - 1} \stackrel{\text{rH}}{=} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2^x \cdot \ln 2}{2x} = \frac{2^{-1} \cdot \ln 2}{2 \cdot (-1)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \ln 2}{-2} =$$

$$\underline{\underline{-\frac{1}{4} \ln 2 \approx -0.1733}}$$

OPPGAVE 5

Gitt en funksjon av to variable:

$$f(x, y) = e^{xy}$$

Finn de partiellderiverte av første og annen orden til $f(x, y)$.

$$f_x = e^{xy} \cdot \frac{\partial}{\partial x}(xy) = \underline{\underline{ye^{xy}}}$$

$$f_y = e^{xy} \cdot \frac{\partial}{\partial y}(xy) = \underline{\underline{xe^{xy}}}$$

$$f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}(ye^{xy}) = \underline{\underline{y^2e^{xy}}}$$

$$f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}(ye^{xy}) = 1 \cdot e^{xy} + y \cdot e^{xy} \cdot x = \underline{\underline{(1+xy)e^{xy}}} = f_{yx}$$

$$f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}(xe^{xy}) = \underline{\underline{x^2e^{xy}}}$$

OPPGAVE 6

Deriver funksjonen

$$f(x) = x^{\sqrt{x}}$$

Tips: benytt logaritmisk derivasjon.

Vi tar først logaritmen på begge sider av uttrykket, og får

$$\ln f(x) = \ln x^{\sqrt{x}}$$

Så benytter vi at $\ln x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x} \cdot \ln x$ for å skrive om høyre side, og får altså

$$\ln f(x) = \sqrt{x} \cdot \ln x$$

Vi må så derivere begge sider av uttrykket.

Husk da at $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$, slik at den deriverte blir $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$.

Vi må også bruke regelen for derivasjon av et produkt på høyre side: $(uv)' = u'v + uv'$.

Bruker vi dette finner vi

$$\frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \cdot \ln x + x^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{x}$$

Vi forenkler høyre side:

$$\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \cdot \ln x + x^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \cdot \ln x + x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \cdot \ln x + x^{\frac{1}{2}-1} =$$

$$\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \cdot \ln x + x^{-\frac{1}{2}} = x^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} \ln x + 1 \right) = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{1}{2} \ln x + 1 \right) =$$

$$\frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2} (\ln x + 2) = \frac{\ln x + 2}{2\sqrt{x}}$$

Dvs.

$$\frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) = \frac{\ln x + 2}{2\sqrt{x}}$$

For å finne $f'(x)$ må vi nå gange begge sider av dette uttrykket med $f(x)$, og vi får da

$$f'(x) = \frac{\ln x + 2}{2\sqrt{x}} \cdot f(x) = \underline{\underline{\frac{\ln x + 2}{2\sqrt{x}} \cdot x^{\sqrt{x}}}}$$

OPPGAVE 7

Regn ut følgende integral:

$$\int \left(2x^3 + \cos 3x - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^3} + e^{3x} \right) dx$$

$$\int \left(2x^3 + \cos 3x - \frac{2}{x} + x^{-3} + e^{3x} \right) dx = \frac{2}{4}x^4 + \frac{1}{3}\sin 3x - 2\ln|x| + \frac{1}{-2}x^{-2} + \frac{1}{3}e^{3x} + C =$$

$$\underline{\underline{\frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}\sin 3x - 2\ln|x| - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3}e^{3x} + C}}$$

OPPGAVE 8

Regn ut følgende integral:

$$\int 8x^3 e^{-x^4} dx$$

Her ser vi at x^3 er den deriverte av kjernen på en faktor nær dersom vi velger $u = -x^4$ som kjerne (det går like bra å velge x^4 som kjerne). Vi kan derfor bruke substitusjonen

$$u = -x^4$$

som gir

$$\frac{du}{dx} = -4x^3$$

dvs.

$$dx = -\frac{1}{4x^3} du$$

Bruker vi dette i integralet, får vi

$$\begin{aligned} \int 8x^3 e^u \cdot \left(-\frac{1}{4x^3}\right) du &= -\frac{8}{4} \int e^u du = -2e^u + C = \\ &= \underline{\underline{-2e^{-x^4} + C}} \end{aligned}$$

OPPGAVE 9

Regn ut følgende integral:

$$\int (2x^2 - x + 3) \sin x dx$$

Her kan vi bruke delvis integrasjon. Vi kan skrive regelen for delvis integrasjon slik:

$$\int u'v dx = uv - \int uv' dx$$

Vi velger

$$u' = \sin x$$

og

$$v = 2x^2 - x + 3$$

som gir

$$u = -\cos x$$

og

$$v' = 4x - 1$$

Vi får da

$$\begin{aligned}\int (2x^2 - x + 3) \sin x \, dx &= (2x^2 - x + 3)(-\cos x) - \int (4x - 1)(-\cos x) \, dx = \\ &= -(2x^2 - x + 3) \cos x + \int (4x - 1) \cos x \, dx\end{aligned}$$

Her må vi igjen bruke delvis integrasjon på det siste integralet. Vi velger

$$u' = \cos x$$

og

$$v = 4x - 1$$

som gir

$$u = \sin x$$

og

$$v' = 4$$

Vi får da

$$\begin{aligned}\int (4x - 1) \cos x \, dx &= (4x - 1) \sin x - \int 4 \sin x \, dx = \\ &= (4x - 1) \sin x - 4(-\cos x) + C_1 = \\ &= (4x - 1) \sin x + 4 \cos x + C_1\end{aligned}$$

Løsningen blir følgende

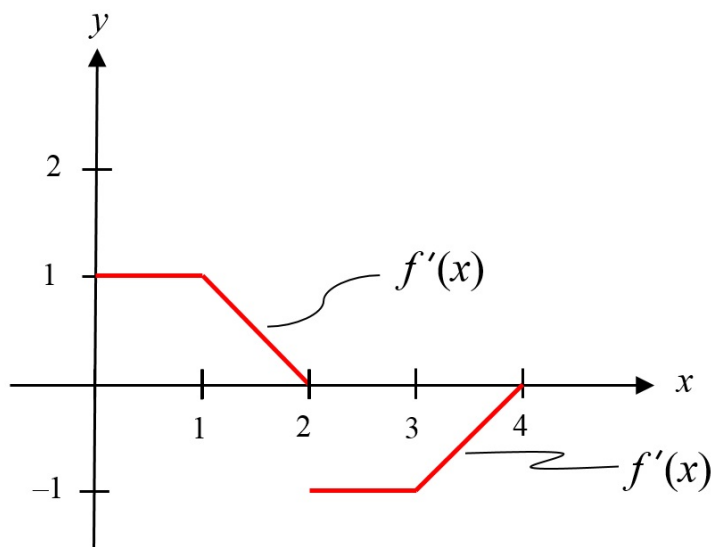
$$\int (2x^2 - x + 3) \sin x \, dx = -(2x^2 - x + 3) \cos x + (4x - 1) \sin x + 4 \cos x + C$$

Da gjenstår det bare å legge sammen to cosinus-ledd: Vi ser at vi har $-3 \cos x$ i det første leddet og $4 \cos x$ i det siste leddet før C . Slår vi disse sammen, kan vi skrive løsningen

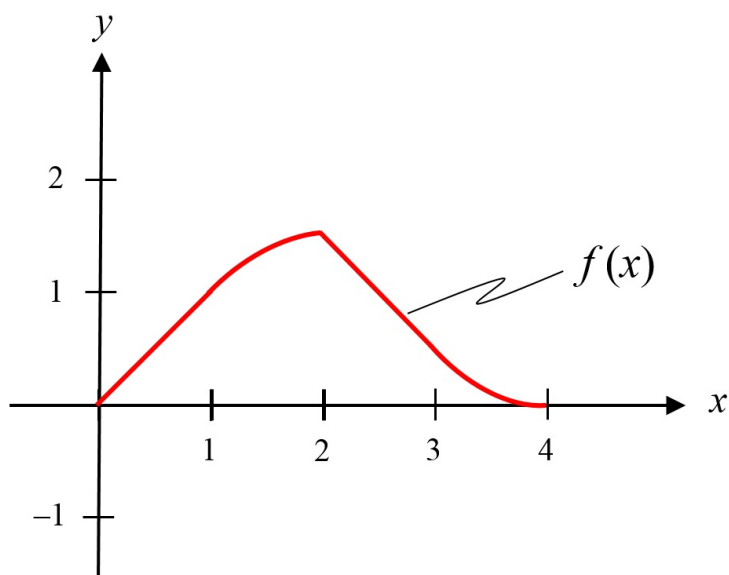
$$\begin{aligned}\int (2x^2 - x + 3) \sin x \, dx &= \\ &= \underline{\underline{(-2x^2 + x + 1) \cos x + (4x - 1) \sin x + C}}\end{aligned}$$

OPPGAVE 10

Gitt en kontinuerlig funksjon $f(x)$ som er definert på intervallet $D_f = [0, 4]$. Funksjonen er ukjent, men vi kjenner grafen til funksjonens deriverte, altså grafen til $f'(x)$. Denne grafen er vist i figuren nedenfor.



- a) Tegn en skisse av $f(x)$ basert på grafen til $f'(x)$. Anta at $f(0) = 0$. Grafen blir seende ut omtrent som dette:



Det er ikke viktig at kandidaten treffer de eksakte verdiene med sin skisse av grafen, men at grafen stiger og avtar der den skal, at den har sitt maksimum for $x = 2$ og sine minima for $x = 0$ og $x = 4$, samt at den er rettlinjet i intervallene $[0, 1]$ og $[2, 3]$ og parabolisk (eller i hvert fall litt krum) i intervallene $[1, 2]$ og $[3, 4]$.

b) Tegn en skisse av $f''(x)$.

