

EKSAMEN – Løsningsforslag

Emnekode: ITD15013	Emnenavn: Matematikk 1 – første deleksamen
Dato: 13. desember 2017	Eksamenstid: 09.00 – 12.00
Hjelpemidler: - To A4-ark med valgfritt innhold på begge sider. - Formelhefte. - Kalkulator som deles ut samtidig med oppgaven.	Faglærer: Christian F Heide
Om eksamensoppgaven og poengberegning: Oppgavesettet består av 6 sider inklusiv denne forsiden og et vedlegg på én side. Kontroller at oppgavesettet er komplett. Oppgavesettet består av 11 oppgaver. Ved sensur vil alle oppgaver telle like mye. Der det er mulig skal du: • vise utregninger og hvordan du kommer fram til svarene • begrunne dine svar	
Sensurfrist: 11. januar 2018 Karakterene er tilgjengelige for studenter på Studentweb senest 2 virkedager etter oppgitt sensurfrist. www.hiof.no/studentweb	



Oppgave 1

Gitt to komplekse tall

$$z = 2e^{i\frac{\pi}{3}} \text{ og } w = 3e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

a) Hva er realdelen og imaginærdelen til tallet z ?

For å finne dette, må vi konvertere tallet til rektangulær form, altså skrive tallet på formen

$$z = a + bi$$

Da er

$$a = r \cos \varphi = 2 \cos \frac{\pi}{3} = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

og

$$b = r \sin \varphi = 2 \sin \frac{\pi}{3} = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

Vi kan altså skrive z som

$$z = a + bi = \underline{1 + \sqrt{3}i}$$

Følgelig er

$$\underline{\operatorname{Re}(z) = 1} \text{ og } \underline{\operatorname{Im}(z) = \sqrt{3}}$$

b) Finn $z \cdot w$. Skriv svaret på eksponentialform.

$$z \cdot w = 2e^{i\frac{\pi}{3}} \cdot 3e^{-i\frac{\pi}{4}} = 2 \cdot 3e^{i(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4})} = 6e^{i(\frac{4\pi}{12} - \frac{3\pi}{12})} = \underline{\underline{6e^{i\frac{\pi}{12}}}}$$

Oppgave 2

Avgjør om funksjonen $f(x)$ er kontinuert for $x = 2$ når den er gitt ved

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{for } x \geq 2 \\ 2x + 4 & \text{for } x < 2 \end{cases}$$

Kravet for at $f(x)$ skal være kontinuert for $x = 2$, er at

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2)$$

Her er

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (2x + 4) = 2 \cdot 2 + 4 = 4 + 4 = 8$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^3) = 2^3 = 8$$

og

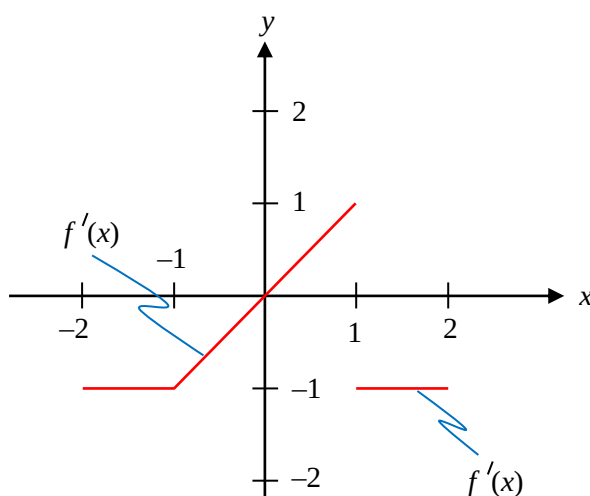
$$f(2) = 2^3 = 8$$

Vi ser at kriteriet er oppfylt, og vi kan konkludere med at

$f(x)$ er kontinuertlig for $x = 2$

Oppgave 3

Gitt en kontinuertlig funksjon $f(x)$ som er definert på intervallet $D_f = [-2, 2]$. Funksjonen er ukjent, men vi kjenner grafen til funksjonens deriverte, altså grafen til $f'(x)$. Denne grafen er vist i figuren nedenfor.



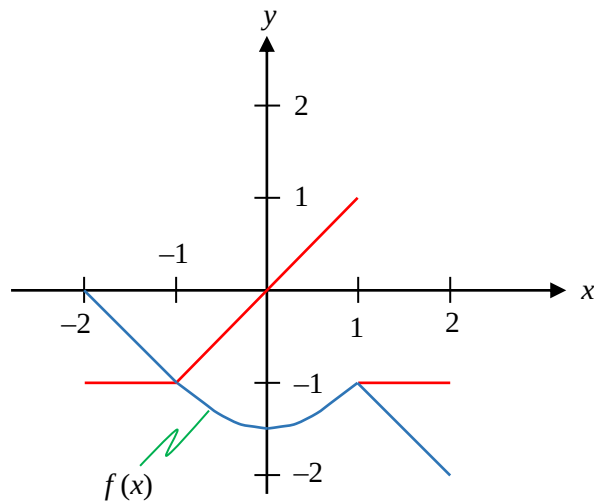
- a) Lag en skisse av funksjonen $f(x)$ basert på figuren over. Anta at $f(-2) = 0$.

I intervallet $[-2, -1]$ har funksjonen en derivert som er konstant og lik -1 . Det betyr at den i dette intervallet er avtagende med stigningstall -1 .

I intervallet $[-1, 1]$ øker den deriverte jevnt fra -1 til 1 . Det betyr at fra -1 til 0 vil funksjonen synke med avtagende hastighet.

I 0 vil den ha sitt minimum siden den deriverte der er 0 , for deretter stige med økende hastighet fram til 1 .

Fra 1 til 2 vil så stigningstallet være på -1 , og funksjonen vil i dette intervallet synke med jevn hastighet. Dette gir en graf som se omtrent slik ut (vist med blå farge):



b) Lag en skisse av den andrederiverte $f''(x)$.

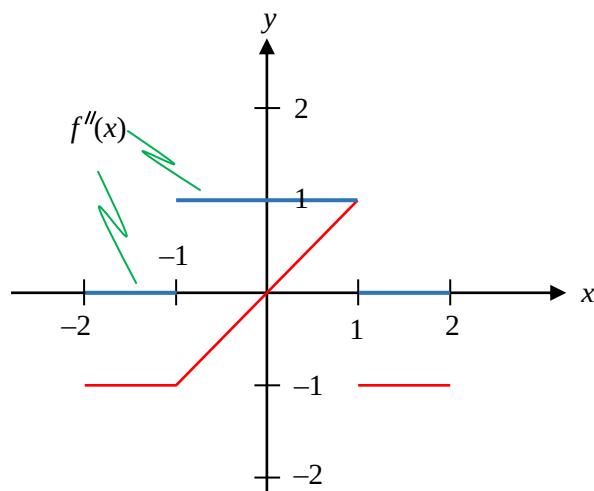
Den andrederiverte angir stigningen til den deriverte.

I intervallet $[-2, -1]$ stiger ikke den deriverte, og den andrederiverte er derfor 0.

I intervallet $[-1, 1]$ har den deriverte en konstant stigning, med stigningskoeffisient lik 1. Den andrederiverte er derfor 1 i dette intervallet.

Fra 1 til 2 er den deriverte igjen konstant, og den andrederiverte er derfor 0.

Den andrederiverte vil derfor se ut slik (vist i blå farge):



Oppgave 4

Bestem følgende grenseverdi dersom den eksisterer:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \cos(1 - x^2)}{x^2 - 2x + 1}$$

Her ser vi at når $x = 1$, vil telleren i brøken bli

$$1 - \cos(1 - 1^2) = 1 - \cos 0 = 1 - 1 = 0$$

og nevneren blir

$$1^2 - 2 \cdot 1 + 1 = 0$$

Vi har følgelig et ubestemt uttrykk av typen $\frac{0}{0}$. Vi kan da bruke l'Hôpitals regel:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \cos(1 - x^2)}{x^2 - 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{0 - (-\sin(1 - x^2)) \cdot (-2x)}{2x - 2} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{-2x \sin(1 - x^2)}{2x - 2}$$

Vi ser at når vi setter inn $x = 1$ i dette uttrykket, blir telleren

$$-2 \cdot 1 \cdot \sin(1 - 1^2) = -2 \sin 0 = (-2) \cdot 0 = 0$$

mens nevneren blir

$$2 \cdot 1 - 2 = 0$$

Vi får altså igjen et $\frac{0}{0}$ -uttrykk, og vi kan derfor på nytt bruke l'Hôpitals regel:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{-2x \sin(1 - x^2)}{2x - 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-2 \sin(1 - x^2) + (-2x) \cos(1 - x^2) \cdot (-2x)}{2} =$$

$$\frac{-2 \sin(1 - 1^2) + (-2 \cdot 1) \cos(1 - 1^2) \cdot (-2 \cdot 1)}{2} = \frac{(-2) \sin 0 + (-2) \cdot (-2) \cos 0}{2}$$

$$\frac{(-2) \cdot 0 + 4 \cdot 1}{2} = \frac{4}{2} =$$

$$\underline{\underline{2}}$$

Oppgave 5

En trigonometrisk funksjon som ikke brukes så ofte, er cotangens. Den er definert ved

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x} \quad \sin x \neq 0$$

a) Bruk definisjonen gitt over til å vise at den deriverte av $\cot x$ er

$$(\cot x)' = -1 - \cot^2 x$$

Vi kan da bruke regelen for derivasjon av en brøk sammen med definisjonen over. Regelen for derivasjon av et brøkuttrykk er

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Vi får

$$\begin{aligned} (\cot x)' &= \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{(\cos x)' \cdot \sin x - \cos x \cdot (\sin x)'}{\sin^2 x} = \\ &= \frac{-\sin x \cdot \sin x - \cos x \cdot \cos x}{\sin^2 x} = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = \\ &= -\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x} \end{aligned}$$

Dette er et korrekt svar, men normalt sett vil vi massere uttrykket litt, slik at vi får det på en mer presentabel form. Det er flere muligheter. Den enkleste formen får vi dersom vi benytter oss av at telleren $\sin^2 x + \cos^2 x$ er lik 1, og skriver svaret som

$$-\frac{1}{\sin^2 x}$$

Vi er imidlertid bedt om å få uttrykket på en bestemt form. Dette ordner vi ved først å dele opp brøken i to, og får

$$-\frac{\sin^2 x}{\sin^2 x} - \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}$$

Det første leddet er -1 siden teller og nevner er like. Det andre leddet kan vi omforme ved å bruke at $\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = \cot^2 x$. Vi får da den ønskede formen

$$\underline{\underline{-1 - \cot^2 x}}$$

- b) Den inverse funksjonen til cotangens, kalles arcuscotangens og skrives $\text{arc cot } x$ (eller $\cot^{-1} x$).

Det er kjent at dersom en funksjon $y = f(x)$ har en invers funksjon, $x = f^{-1}(y)$, vil den deriverte av den inverse funksjonen være lik den inverse av den deriverte av funksjonen, altså at

$$\frac{df^{-1}(y)}{dy} = \frac{1}{\frac{df(x)}{dx}}$$

Bruk dette sammen med resultatet i spørsmål a) til å finne den deriverte av $\text{arc cot } x$.

Hvis vi nå benevner $y = f(x) = \cot x$, så vet vi fra spørsmål a) at

$$\frac{df(x)}{dx} = -1 - \cot^2 x$$

Den inverse funksjonen til $f(x) = \cot x$, er $x = f^{-1}(y) = \text{arc cot } y$.

Da vet vi at

$$\frac{df^{-1}(y)}{dy} = \frac{1}{\frac{df(x)}{dx}} = \frac{1}{-1 - \cot^2 x} = -\frac{1}{1 + \cot^2 x}$$

Vi setter så inn at $x = \text{arc cot } y$ slik at vi får uttrykt $\frac{df^{-1}(y)}{dy}$ ved y istedenfor ved x .

Vi får da

$$\frac{df^{-1}(y)}{dy} = -\frac{1}{1 + \cot^2 x} = -\frac{1}{1 + (\cot(\text{arc cot } y))^2}$$

Siden cotangens og arcuscotangens er inverse funksjoner, blir $\cot(\text{arc cot } y)$ lik y .

Dette gir

$$\frac{df^{-1}(y)}{dy} = -\frac{1}{1 + y^2}$$

Bytter vi så navn på den frie variabelen fra y til x , får vi

$$(\text{arc cot } x)' = -\frac{1}{1 + x^2}$$

Oppgave 6

Gitt ligningen

$$4\sin(3x) = x$$

- a) Benytt skjæringssetningen til å vise at denne ligningen har minst én løsning i intervallet $[0.5, 1]$.

Vi omskriver først ligningen slik:

$$4\sin(3x) - x = 0$$

Kaller vi nå venstre side $f(x)$, altså at

$$f(x) = 4\sin(3x) - x$$

blir det å finne løsningen på ligningen det samme som å finne hvor $f(x) = 0$.

Siden $f(x)$ er en kontinuerlig funksjon sier skjæringssetningen at dersom $f(0.5)$ og $f(1)$ har forskjellig fortegn, vil det finnes minst en x -verdi i intervallet $[0.5, 1]$ hvor $f(x) = 0$, altså en løsning av ligningen. Vi sjekker om dette er tilfelle:

$$f(0.5) = 4\sin(3 \cdot 0.5) - 0.5 = 4\sin 1.5 - 0.5 \approx 3.99 - 0.5 = 3.49$$

$$f(1) = 4\sin(3 \cdot 1) - 1 = 4\sin 3 - 1 \approx 0.56 - 1 = -0.44$$

Vi ser at fortegnet til funksjonsverdiene i de to endepunktene er ulike. Følgelig finnes det et tall c i intervallet $[0.5, 1]$ slik at $f(c) = 0$, altså en løsning av ligningen.

- b) Det kan vises at ligningen har nøyaktig én løsning i intervallet $[0.5, 1]$.

Benytt Newtons metode med to iterasjoner til å finne en tilnærmet verdi for denne løsningen. Benytt startverdien $x_0 = 1$.

Newtons metode kan beskrives ved følgende rekursjonsformel:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Her er

$$f'(x) = 4\cos(3x) \cdot (3x)' - 1 = 4\cos(3x) \cdot 3 - 1 = 12\cos(3x) - 1$$

Dette gir

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 1 - \frac{4\sin(3) - 1}{12\cos(3) - 1} = 1 - 0.0338 = 0.9662$$

og

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 0.9662 - \frac{4\sin(2.8986) - 0.9662}{12\cos(2.8986) - 1} =$$

$$0.9662 - 0.0003 = \underline{\underline{0.9659}}$$

Oppgave 7

En kurve i planet er definert ved følgende ligning:

$$2xy + \sin y = 2\pi$$

- a)** Vis at punktet $(1, \pi)$ ligger på kurven.

Vi kan vise at punktet ligger på kurven ved å sjekke at venstre side blir lik høyre side når vi setter $x = 1$ og $y = \pi$ inn i ligningen. Venstre side blir da

$$2 \cdot 1 \cdot \pi + \sin \pi = 2\pi + 0 = 2\pi$$

som vi ser er lik høyre side.

- b)** Finn ligningen for tangenten til kurven i dette punktet.

For å finne ligningen til tangenten, må vi finne tangentens stigningstall i punktet. Denne finner vi ved å derivere uttrykket. Siden det ikke er mulig å skrive y som en eksplisitt funksjon av x , må vi gjøre en implisitt derivasjon:

$$2y + 2xy' + \cos y \cdot y' = 0$$

Vi flytter så alt som ikke inneholder y' over på høyre side:

$$2xy' + \cos y \cdot y' = -2y$$

Vi trekker ut y' som felles faktor på venstre side:

$$y'(2x + \cos y) = -2y$$

Så deler vi begge sider på uttrykket i parentesene, og får

$$y' = -\frac{2y}{2x + \cos y}$$

Vi bruker så dette uttrykket til å finne stigningstallet i punktet $(1, \pi)$:

$$y'(1, \pi) = -\frac{2 \cdot \pi}{2 \cdot 1 + \cos \pi} = -\frac{2\pi}{2 + (-1)} = -\frac{2\pi}{1} = \underline{\underline{-2\pi}}$$

Ved hjelp av den såkalt ettpunktsformelen kan vi nå finne ligningen til tangenten i punktet $(1, \pi)$. Ettpunktsformelen lyder:

$$y - y_0 = a(x - x_0)$$

(x_0, y_0) er et kjent punkt på linja, altså $(1, \pi)$ i vårt tilfelle. a er linjas stigningstall, som vi altså har funnet at er 2π . Dette gir

$$y - \pi = -2\pi(x - 1)$$

Ganger vi ut parentesen, får vi

$$y - \pi = -2\pi x + 2\pi$$

som gir

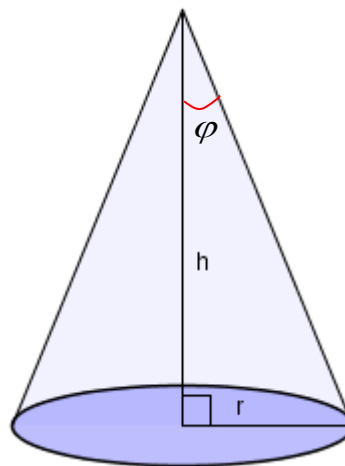
$$\underline{\underline{y = -2\pi x + 3\pi}}$$

Oppgave 8

Det kan vises at en rett, sirkulær kjegle med høyde h og vinkel φ mellom aksen og sidekanten (se figur) har volumet

$$V(h, \varphi) = \frac{\pi}{3} h^3 \tan^2 \varphi$$

- a) Finn $V_h = \frac{\partial V}{\partial h}$ og $V_\varphi = \frac{\partial V}{\partial \varphi}$, altså de partiellderiverte av volumfunksjonen med hensyn på henholdsvis h og φ .



$$V_h(h, \varphi) = \frac{\pi}{3} \cdot 3h^2 \tan^2 \varphi =$$

$$\underline{\underline{\pi h^2 \tan^2 \varphi}}$$

$$V_\varphi(h, \varphi) = \frac{\pi}{3} h^3 \cdot 2 \tan \varphi \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi} (\tan \varphi) =$$

$$\underline{\underline{\frac{2\pi}{3} h^3 \tan \varphi \cdot (\tan^2 \varphi + 1) =}}$$

$$\underline{\underline{\frac{2\pi}{3} h^3 \tan \varphi \cdot \frac{1}{\cos^2 \varphi}}}$$

(den deriverte av $\tan x$ kan skrives både som $(\tan^2 \varphi + 1)$ og som $\frac{1}{\cos^2 \varphi}$).

- b) For å beregne volumet til en slik kjegle, måler du høyden. Du finner at høyden er 2 m, men klarer ikke å måle den helt nøyaktig. Du estimerer unøyaktigheten i denne målingen til $\Delta h = 0.1$ m. Videre måler du vinkelen og finner $\varphi = \frac{\pi}{4}$, og estimerer unøyaktigheten i denne målingen til $\Delta\varphi = 0.05$ radianer.

Bruk lineær approksimasjon til å finne en tilnærmet verdi for den feilen du kan få i volumet, ΔV , på grunn av unøyaktighetene i målingene.

Lineær approksimasjon for en funksjon av to variable $f(x, y)$, er gitt ved

$$f(a+h, b+k) \approx f(a, b) + f_x(a, b) \cdot h + f_y(a, b) \cdot k$$

For vår funksjon blir dette

$$V(h+\Delta h, \varphi+\Delta\varphi) \approx V(h, \varphi) + V_h(h, \varphi) \cdot \Delta h + V_\varphi(h, \varphi) \cdot \Delta\varphi$$

og altså

$$\Delta V = V(h+\Delta h, \varphi+\Delta\varphi) - V(h, \varphi) \approx V_h(h, \varphi) \cdot \Delta h + V_\varphi(h, \varphi) \cdot \Delta\varphi$$

Setter vi så inn de partiellderiverte fra spørsmål a og tallene gitt i oppgaven, får vi

$$\Delta V = V(h+\Delta h, \varphi+\Delta\varphi) - V(h, \varphi) \approx$$

$$\pi h^2 \tan^2 \varphi \cdot \Delta h + \frac{2\pi}{3} h^3 \tan \varphi \cdot (\tan^2 \varphi + 1) \cdot \Delta\varphi =$$

$$\pi \cdot 2^2 \tan^2 \frac{\pi}{4} \cdot 0.1 + \frac{2\pi}{3} \cdot 2^3 \tan \frac{\pi}{4} \cdot (\tan^2 \frac{\pi}{4} + 1) \cdot 0.05 =$$

$$\pi \cdot 4 \cdot 1^2 \cdot 0.1 + \frac{2\pi}{3} \cdot 8 \cdot 1 \cdot (1^2 + 1) \cdot 0.05 =$$

$$0.4\pi + 0.5\pi = 0.9\pi = 2.9$$

Her er høyden målt i meter, og svaret er derfor i kubikkmeter. Altså

$$\underline{\underline{\Delta V \approx 2.9 \text{ m}^3}}$$

Oppgave 9

Løs følgende integral:

$$\int \left(2x^3 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \sin x - e^x \right) dx$$

Denne kan vi integrere direkte:

$$\int \left(2x^3 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \sin x - e^x \right) dx =$$

$$\int 2x^3 dx + \int \frac{1}{x} dx - \int x^{-2} dx + \int \sin x dx - \int e^x dx =$$

$$\frac{2}{3+1} x^{3+1} + \ln|x| - \frac{1}{-2+1} x^{-2+1} + (-\cos x) - e^x + C =$$

$$\underline{\underline{\frac{1}{2} x^4 + \ln|x| + x^{-1} - \cos x - e^x + C}}$$

Oppgave 10

Løs følgende integral:

$$\int (1-x^2) e^x dx$$

Her kan vi benytte delvis integrasjon. Regelen for delvis integrasjon kan skrives slik:

$$\int u'v dx = uv - \int uv' dx$$

Vi velger

$$u' = e^x \quad \text{og} \quad v = 1 - x^2$$

som gir

$$u = e^x \quad \text{og} \quad v' = -2x$$

Integralet blir da

$$\int (1-x^2) e^x dx = (1-x^2) e^x - \int (-2x) e^x dx =$$

$$(1-x^2) e^x + 2 \int x e^x dx$$

Det integralet vi da får, $\int x e^x dx$, kan vi løse ved å benytte delvis integrasjon en gang til. Vi velger nå

$$u' = e^x \quad \text{og} \quad v = x$$

som gir

$$u = e^x \quad \text{og} \quad v' = 1$$

Integralet blir da

$$\int x e^x dx = x e^x - \int 1 \cdot e^x dx = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + C_1$$

Løsningen blir følgelig

$$\int (1-x^2)e^x dx = (1-x^2)e^x + 2 \int xe^x dx =$$

$$(1-x^2)e^x + 2(xe^x - e^x + C_1) =$$

$$(1-x^2)e^x + 2xe^x - 2e^x + 2C_1$$

Vi kaller $2C_1$ for C og får da:

$$(1-x^2)e^x + 2xe^x - 2e^x + C$$

Så ganger vi ut parentesene, forenkler og trekker $-e^x$ utenfor parentes:

$$e^x - x^2e^x + 2xe^x - 2e^x + C =$$

$$-x^2e^x + 2xe^x - e^x + C =$$

$$\underline{\underline{-e^x(x^2 - 2x + 1) + C}}$$

Oppgave 11

Løs følgende integral:

$$\int \frac{1}{x^2 - 4x + 13} dx$$

Vi kan sjekke om nevneren har reelle røtter slik at vi kan gjøre en delbrøkoppspalting:

$$x^2 - 4x + 13 = 0$$

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 13}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 52}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-36}}{2}$$

Vi ser at nevneren ikke har reelle røtter. Vi må derfor forsøke å omforme nevneren slik at vi kan bruke formelen

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C$$

Vi omformer nevneren slik

$$x^2 - 4x + 13 = (x-2)^2 + 9 = 9\left(\frac{1}{9}(x-2)^2 + 1\right) = 9\left(\left(\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}\right)^2 + 1\right)$$

Integralet ser da slik ut:

$$\int \frac{1}{9\left(\left(\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}\right)^2 + 1\right)} dx = \frac{1}{9} \int \frac{1}{\left(\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}\right)^2 + 1} dx$$

Vi gjør så substitusjonen

$$u = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$$

som gir

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{3}$$

og følgelig

$$dx = 3du$$

Vi får da

$$\frac{1}{9} \int \frac{1}{\left(\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}\right)^2 + 1} dx = \frac{1}{9} \int \frac{1}{u^2 + 1} 3du = \frac{3}{9} \int \frac{1}{1 + u^2} du = \frac{1}{3} \arctan u + C =$$

$$\underline{\underline{\frac{1}{3} \arctan\left(\frac{x}{3} - \frac{2}{3}\right) + C}}$$