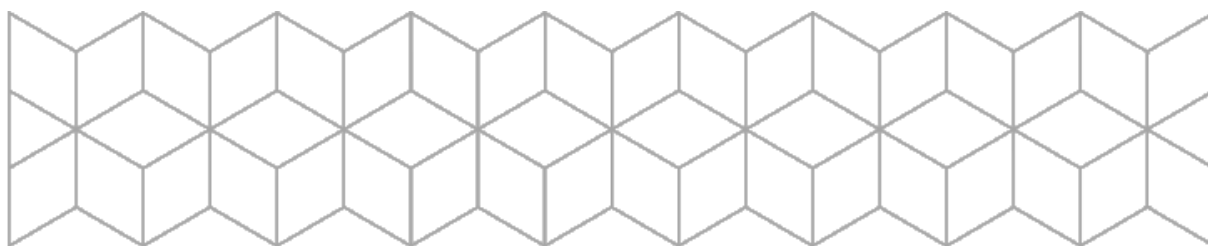


EKSAMEN – Løsningsforslag

Emnekode: ITD15013	Emnenavn: Matematikk 1 – første deleksamen
Dato: 13. desember 2016	Eksamenstid: 09.00 – 12.00
Hjelpemidler: - To A4-ark med valgfritt innhold på begge sider. - Formelhefte. - Kalkulator som deles ut samtidig med oppgaven.	Faglærer: Christian F Heide
Om eksamensoppgaven og poengberegning: Oppgavesettet består av 5 sider inklusiv denne forsiden og et vedlegg på én side. Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene. Oppgavesettet består av 12 oppgaver. Ved sensur vil alle oppgaver telle like mye. Der det er mulig skal du: • vise utregninger og hvordan du kommer fram til svarene • begrunne dine svar	
Sensurfrist: 11. januar 2017 Karakterene er tilgjengelige for studenter på Studentweb senest 2 virkedager etter oppgitt sensurfrist. www.hiof.no/studentweb	



Oppgave 1

Løs følgende trigonometriske ligning for $x \in [0, 2\pi)$:

$$\cos^2 x + \sin^2 x + \cos x = \frac{1}{2}$$

Denne løser vi lettest ved å benytte at $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$. Benytter vi dette får vi

$$1 + \cos x = \frac{1}{2}$$

som etter ordning gir

$$\cos x = \frac{1}{2} - 1$$

og altså

$$\cos x = -\frac{1}{2}$$

$$x = \cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = \underline{\underline{\frac{2\pi}{3}}} \quad \vee \quad x = 2\pi - \frac{2\pi}{3} = \underline{\underline{\frac{4\pi}{3}}}$$

Oppgave 2

Gitt to vektorer i det euklidske rommet $\mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{v} = -\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$$

$$\mathbf{w} = 5\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$$

Finn vinkelen mellom disse vektorene. Oppgi vinkelen i grader.

Her kan vi bruke skalarproduktet (prikkproduktet) til å finne dette:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = (-1) \cdot 5 + (-2) \cdot (-1) + 3 \cdot 2 = -5 + 2 + 6 = 3$$

Lengdene av vektorene er

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + 3^2} = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}$$

$$|\mathbf{w}| = \sqrt{5^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{25+1+4} = \sqrt{30}$$

Videre har vi definisjonen av skalarprodukt:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = |\mathbf{v}| \cdot |\mathbf{w}| \cdot \cos \varphi$$

hvor φ er vinkelen mellom vektorene.

Løser vi denne med hensyn på $\cos \varphi$, får vi

$$\cos \varphi = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}) / (|\mathbf{v}| \cdot |\mathbf{w}|)$$

Dette gir

$$\cos \varphi = \frac{3}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{30}} = 0.1464$$

og følgelig

$$\varphi = \cos^{-1}(0.1464) = \underline{\underline{81.6^\circ}}$$

Oppgave 3

Gitt ligningen

$$x^3 - 2x^2 - 2 = 0$$

- i) *Benytt skjæringssetningen til å vise at ligningen har minst én løsning i intervallet $[2, 3]$.*

Vi kan kalle venstresiden i ligningen for $f(x)$, altså

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - 2$$

Vi kan da skrive ligningen som

$$f(x) = 0$$

Vi kan nå regne ut funksjonsverdiene i endepunktene av intervallet:

$$f(2) = 2^3 - 2 \cdot 2^2 - 2 = 8 - 8 - 2 = -2$$

$$f(3) = 3^3 - 2 \cdot 3^2 - 2 = 27 - 18 - 2 = 7$$

Vi ser at $f(2)$ og $f(3)$ har ulike fortegn. Siden $f(x)$ er en kontinuerlig funksjon sier skjæringssetningen at da må det finnes en x -verdi i intervallet $[2, 3]$ hvor $f(x) = 0$, altså en løsning av ligningen.

- ii) *Ligningen har nøyaktig én løsning i intervallet $[2, 3]$. Benytt Newtons metode med to iterasjoner til å finne en tilnærmet verdi for denne løsningen. Benytt startverdien $x_0 = 3$.*

Newton's metode kan beskrives slik

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Her er

$$f'(x) = 3x^2 - 4x$$

Vi får da

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 3 - \frac{f(3)}{f'(3)} = 3 - \frac{3^3 - 2 \cdot 3^2 - 2}{3 \cdot 3^2 - 4 \cdot 3} = 3 - \frac{7}{15} = 2.5333$$

og

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 2.5333 - \frac{2.5333^3 - 2 \cdot 2.5333^2 - 2}{3 \cdot 2.5333^2 - 4 \cdot 2.5333} =$$

$$2.5333 - \frac{1.4228}{9.1200} = 2.5333 - 0.1560 = \underline{\underline{2.3773}}$$

Oppgave 4

Finn realdel og imaginærdel til det komplekse tallet

$$z = \frac{(1+i)^2}{1-2i}$$

For å finne dette, må vi skrive tallet på rektangulær (kartesisk) form. Dette fikser vi ved å multiplisere teller og nevner med den komplekskonjugerte av nevneren:

$$z = \frac{(1+i)^2}{1-2i} \cdot \frac{1+2i}{1+2i} = \frac{(1+i)(1+i)(1+2i)}{1^2 + 2^2} =$$

$$\frac{(1+i+i+i^2)(1+2i)}{1+4} = \frac{(1+2i-1)(1+2i)}{5} =$$

$$\frac{2i(1+2i)}{5} = \frac{2i+4i^2}{5} = \frac{2i-4}{5} = \frac{-4+2i}{5} = \underline{\underline{-\frac{4}{5} + \frac{2}{5}i}}$$

Av dette ser vi at

$$\underline{\underline{\operatorname{Re}(z) = -\frac{4}{5}}} \quad \text{og} \quad \underline{\underline{\operatorname{Im}(z) = \frac{2}{5}}}$$

Oppgave 5

Bruk logaritmisk derivasjon til å finne den deriverte av følgende funksjon:

$$f(x) = \sqrt{x} \cdot \sin x \cdot \sqrt[3]{\cos x} \cdot e^{2x}$$

Vi tar først logaritmen til begge sider av uttrykket:

$$\ln f(x) = \ln(\sqrt{x} \cdot \sin x \cdot \sqrt[3]{\cos x} \cdot e^{2x})$$

som gir

$$\ln f(x) = \ln(\sqrt{x}) + \ln(\sin x) + \ln((\cos x)^{\frac{1}{3}}) + \ln e^{2x}$$

og

$$\ln f(x) = \frac{1}{2} \ln x + \ln(\sin x) + \frac{1}{3} \ln(\cos x) + 2x$$

Deriverer vi så begge sider, får vi

$$\frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{\sin x} (\sin x)' + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\cos x} \cdot (\cos x)' + 2$$

og

$$\frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) = \frac{1}{2x} + \frac{1}{\sin x} \cos x + \frac{1}{3 \cos x} \cdot (-\sin x) + 2$$

Ganger vi så med $f(x)$ på begge sider, får vi

$$f'(x) = \left(\frac{1}{2x} + \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\sin x}{3 \cos x} + 2 \right) \cdot f(x)$$
$$\underline{\underline{\left(\frac{1}{2x} + \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{1}{3} \cdot \frac{\sin x}{\cos x} + 2 \right) \cdot \sqrt{x} \cdot \sin x \cdot \sqrt[3]{\cos x} \cdot e^{2x}}}$$

Hvis vi vil kan vi benytte at $\frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$ og følgelig at $\frac{\cos x}{\tan x} = \frac{1}{\tan x}$. Uttrykket kan da skrives

$$f'(x) = \left(\frac{1}{2x} + \frac{1}{\tan x} - \frac{1}{3} \tan x + 2 \right) \cdot f(x) =$$
$$\underline{\underline{\left(\frac{1}{2x} + \frac{1}{\tan x} - \frac{1}{3} \tan x + 2 \right) \cdot \sqrt{x} \cdot \sin x \cdot \sqrt[3]{\cos x} \cdot e^{2x}}}$$

Oppgave 6

Finn følgende grenseverdi dersom den eksisterer:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2+x} - \sqrt{2}}{x}$$

Forsøker vi å sette inn $x = 0$, ser vi at vi får

$$\frac{\sqrt{2+0} - \sqrt{2}}{0} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{2}}{0} = \frac{0}{0}$$

Vi får altså et ubestemt uttrykk. Vi kan da bruke l'Hôpitals regel for å finne grenseverdien. Regelen sier at vi kan derivere teller og nevner hver for seg for å finne grenseverdien:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2+x} - \sqrt{2}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{2+x} - \sqrt{2})'}{x'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left((2+x)^{\frac{1}{2}}\right)' - (\sqrt{2})'}{1} =$$

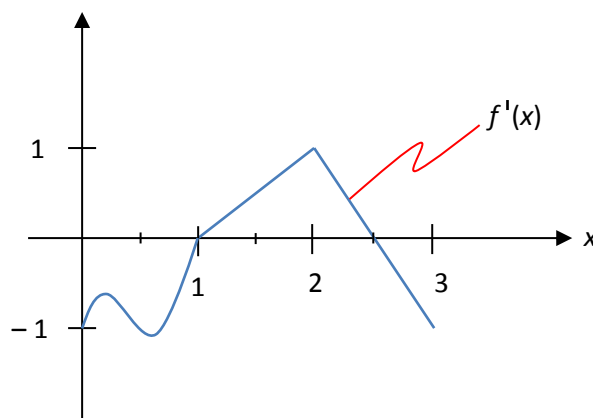
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}(2+x)^{-\frac{1}{2}} - 0}{1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2}(2+x)^{-\frac{1}{2}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2(2+x)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2(2+0)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2(2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \underline{\underline{\frac{\sqrt{2}}{4}}}$$

Oppgave 7

Gitt en kontinuerlig funksjon $f(x)$ som er definert på det åpne intervallet $D_f = \langle 0, 3 \rangle$.

Funksjonen er ukjent, men vi kjenner grafen til funksjonens deriverte, altså grafen til $f'(x)$, og denne grafen er vist i figuren nedenfor.



- i) Angi i hvilke intervaller funksjonen $f(x)$ er voksende og avtagende.

Funksjonen er **voksende** der den deriverte er positiv, altså i intervallet $\langle 1, 2.5 \rangle$.

Funksjonen er **avtagende** der den deriverte er negativ, altså i intervallene $\langle 0, 1 \rangle$ og $\langle 2.5, 3 \rangle$

- ii) For hvilken eller hvilke x -verdier har funksjonen sine maksimums- og minimumsverdier? Forklar og begrunn ditt svar.

Funksjonen kan ha sine ekstremalverdier der den deriverte er null (eller ikke eksisterer, men her eksisterer den overalt i definisjonsområdet) og/eller i definisjonsområdets endepunkter. Siden definisjonsområdet er åpent, altså at det ikke har noen endepunkter, er det kun i de kritiske punktene funksjonen kan ha sine ekstremalverdier. Av grafen til den deriverte ser vi at funksjonen har et lokalt minimum for $x = 1$ og et lokalt maksimum for $x = 2.5$.

Oppgave 8

Følgende ligning beskriver en kurve i planet:

$$xy^3 - ye^{-y} + e^{-1} = 1$$

Finn ligningen til kurvens tangent i punktet $(1, 1)$.

Siden det ikke er mulig å skrive y som en eksplisitt funksjon av x , må gjøre en implisitt derivasjon for å finne stigningskoeffisienten til tangenten i punktet:

$$1 \cdot y^3 + x \cdot 3y^2 \cdot y' - (y' \cdot e^{-y} + y \cdot e^{-y} \cdot (-y)') + 0 = 0$$

$$y^3 + 3xy^2 \cdot y' - (y'e^{-y} + ye^{-y}(-1)y') = 0$$

Vi flytter så alt som ikke inneholder y' over på høyre side:

$$y^3 + 3xy^2 \cdot y' - y'e^{-y} + ye^{-y}y' = 0$$

Trekker ut y' som felles faktor på venstre side:

$$(3xy^2 - e^{-y} + ye^{-y})y' = -y^3$$

Så deler vi begge sider på uttrykket i parentesene, og får

$$y' = -\frac{y^3}{3xy^2 - e^{-y} + ye^{-y}}$$

Ved hjelp av dette uttrykket kan vi nå finne stigningskoeffisienten til tangenten i punktet $(1, 1)$:

$$y'(1,1) = -\frac{1^3}{3 \cdot 1 \cdot 1^2 - e^{-1} + 1 \cdot e^{-1}} = -\frac{1}{3 - e^{-1} + e^{-1}} = -\frac{1}{3}$$

Ved hjelp av den såkalt ettpunktsformelen kan vi nå finne ligningen til tangenten i punktet (1, 1):

$$y - y_0 = a(x - x_0)$$

hvor (x_0, y_0) er et kjent punkt på linja og a er linjas stigningskoeffisient. Dette gir

$$y - 1 = -\frac{1}{3}(x - 1)$$

og altså

$$y = -\frac{1}{3}(x - 1) + 1 = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3} + 1$$

dvs.

$$\underline{\underline{y = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}}}$$

Oppgave 9

Et mål for overvekt hos mennesker er BMI (body mass index). En persons BMI er definert som

$$B(v, h) = \frac{v}{h^2}$$

der v er personens vekt i kilo og h er personens høyde i meter.

En ungdom måles og veies, og man finner at $v = 75$ kg og $h = 1.70$ m. Dette gir en BMI på $B = 25.95$.

Benytt lineær approksimasjon til å estimere endringen i BMI dersom vekten øker fra 75 kg til 77 kg og høyden øker fra 1.70 m til 1.72 m.

Her har vi altså en funksjon B av to variable. Lineær approksimasjon omkring punktet (a, b) for en funksjon $f(x, y)$ av to variable, skrives ofte slik:

$$f(a + h, b + k) \approx f(a, b) + f_x(a, b) \cdot h + f_y(a, b) \cdot k$$

Her heter funksjonen $B(v, h)$. Siden h er navnet på en av variablene, kaller vi endringene Δv og Δh for å unngå å rote det til. Vi skriver da

$$B(v + \Delta v, h + \Delta h) \approx B(v, h) + B_v(v, h) \cdot \Delta v + B_h(v, h) \cdot \Delta h$$

Siden det er endringen i BMI vi skal finne, flytter vi leddet $B(a, b)$ over på venstre side, og får

$$B(v + \Delta v, h + \Delta h) - B(v, h) \approx B_v(v, h) \cdot \Delta v + B_h(v, h) \cdot \Delta h$$

Vi må nå partiellderivere $B(v, h) = \frac{v}{h^2} = v \cdot h^{-2}$:

$$B_v(v, h) = 1 \cdot h^{-2} = \frac{1}{h^2}$$

$$B_h(v, h) = v \cdot (-2) \cdot h^{-3} = -\frac{2v}{h^3}$$

Vi kan så regne ut verdiene i punktet (75, 1.70):

$$B(75, 1.70) = \frac{75}{1.7^2} = 25.95$$

$$B_v(75, 1.70) = \frac{1}{1.7^2} = 0.346$$

$$B_h(75, 1.7) = -\frac{2 \cdot 75}{1.7^3} = -30.53$$

Videre er altså $\Delta v = 2$ og $\Delta h = 0.02$. Vi får da følgende approksimasjon for endringen i BMI:

$$\begin{aligned} B(75 + 2, 1.70 + 0.02) - B(75, 1.70) &\approx \\ 0.346 \cdot 2 + (-30.53) \cdot 0.02 &= 0.69 - 0.61 = \underline{\underline{0.08}} \end{aligned}$$

Oppgave 10

Bestem følgende integral

$$\int \left(\cos x + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + 4^x \right) dx$$

Selve integreringen her er «rett fram», men det kan være lurt å gjøre om på det ene leddet i integranden:

$$\int \left(\cos x + \frac{1}{x} - x^{-2} + 4^x \right) dx = \sin x + \ln |x| - \frac{1}{-2+1} x^{-2+1} + \frac{1}{\ln 4} 4^x + C =$$

$$\underline{\underline{\sin x + \ln |x| + \frac{1}{x} + \frac{4^x}{\ln 4} + C}}$$

Oppgave 11

Bestem følgende integral

$$\int \frac{2}{x(2 + \ln x)^{\frac{1}{2}}} dx \quad (\text{Hint: bruk substitusjon})$$

Her kan vi forsøke å kalle uttrykket i parentesen for u og se om det fører fram:

$$u = 2 + \ln x$$

Dette gir

$$\frac{du}{dx} = 0 + \frac{1}{x} = \frac{1}{x}$$

som gir

$$dx = x du$$

Setter vi så dette inn i integralet, får vi

$$\int \frac{2}{x(2 + \ln x)^{\frac{1}{2}}} dx = 2 \int \frac{1}{xu^{\frac{1}{2}}} x du = 2 \int \frac{1}{u^{\frac{1}{2}}} du$$

$$2 \int u^{-\frac{1}{2}} du = 2 \cdot \frac{1}{-\frac{1}{2} + 1} u^{-\frac{1}{2} + 1} + C = 2 \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}} u^{\frac{1}{2}} + C = 4u^{\frac{1}{2}} + C =$$

$$\underline{\underline{4(2 + \ln x)^{\frac{1}{2}} + C =}}$$

$$\underline{\underline{4\sqrt{2 + \ln x} + C}}$$

Oppgave 12

Bestem følgende integral:

$$\int \frac{4}{x^2 - 1} dx$$

Her kan vi forsøke med delbrøkkoppspalting. Her ser vi at vi kan skrive nevneren (3. kvadratsetning):

$$x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$$

Vi spalter integranden i to brøker:

$$\frac{4}{x^2-1} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1}$$

som gir, når vi multipliserer begge sider med $(x+1)(x-1)$:

$$\frac{4}{x^2-1}(x+1)(x-1) = \frac{A}{x+1}(x+1)(x-1) + \frac{B}{x-1}(x+1)(x-1)$$

$$4 = A(x-1) + B(x+1)$$

Vi setter så inn verdien $x = 1$, som gir

$$4 = A(1-1) + B(1+1)$$

$$4 = A \cdot 0 + B \cdot 2$$

$$B = \frac{4}{2} = \underline{2}$$

$x = -1$ gir

$$4 = A(-1-1) + B(-1+1)$$

$$4 = A \cdot (-2) + B \cdot 0$$

$$A = \frac{4}{-2} = \underline{-2}$$

Integranden kan altså skrives slik

$$\frac{4}{x^2-1} = \frac{-2}{x+1} + \frac{2}{x-1}$$

Integralet blir derfor

$$\begin{aligned} \int \frac{4}{x^2-1} dx &= \int \left(\frac{-2}{x+1} + \frac{2}{x-1} \right) dx = \int \frac{-2}{x+1} dx + \int \frac{2}{x-1} dx = \\ &= -2 \int \frac{1}{x+1} dx + 2 \int \frac{1}{x-1} dx = \underline{\underline{-2 \ln |x+1| + 2 \ln |x-1| + C}} \end{aligned}$$