

28. januar 2016

Løsningsforslag til eksamen

Emnekode: ITD15013	Emne: Matematikk 1 – første deleksamen
Dato: 17. desember 2015	Eksamenstid: 09.00 – 12.00
Hjelpemidler: To A4-ark med valgfritt innhold på begge sider. Formelhefte. Kalkulator er ikke tillatt .	Faglærer: Christian F Heide
Eksamensoppgaven: Oppgavesettet består av 5 sider inklusiv denne forsiden og et vedlegg på én side. Kontroller at oppgavesettet er komplett. Oppgavesettet består av 9 oppgaver med i alt 13 deloppgaver. Ved sensur vil alle deloppgaver telle like mye. Der det er mulig skal du: • vise utregninger og hvordan du kommer fram til svarene • begrunne dine svar, selv om dette ikke er eksplisitt sagt i hvert spørsmål	
Sensurdato: Mandag 18. januar 2015 Karakterene er tilgjengelige for studenter på studentweb senest 2 virkedager etter oppgitt sensurfrist. Følg instruksjoner gitt på: www.hiof.no/studentweb	

Oppgave 1

Gitt følgende vektorer i $\mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{v} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$$

$$\mathbf{w} = -\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$$

- a) Undersøk om vektorene er ortogonale (altså om de står vinkelrett på hverandre). At vektorene er ortogonale er ekvivalent med at skalarproduktet (prikkproduktet) mellom dem er 0. Vi sjekker derfor dette:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 1 \cdot (-1) + 3 \cdot 1 + (-2) \cdot 1 = -1 + 3 - 2 = \underline{0}$$

Vi ser at skalarproduktet er 0. Dette innebærer at vektorene er ortogonale.

- b) Finn $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$.

$$\mathbf{v} \times \mathbf{w} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \mathbf{k} =$$

$$(3 \cdot 1 - (-2 \cdot 1)) \cdot \mathbf{i} - (1 \cdot 1 - (-2) \cdot (-1)) \cdot \mathbf{j} + (1 \cdot 1 - (3 \cdot (-1))) \cdot \mathbf{k} =$$

$$(3 + 2) \cdot \mathbf{i} - (1 - 2) \cdot \mathbf{j} + (1 + 3) \cdot \mathbf{k} =$$

$$\underline{\underline{5\mathbf{i} + \mathbf{j} + 4\mathbf{k}}}$$

Oppgave 2

Gitt det komplekse tallet $z = \frac{5}{1-2i}$.

Finn realdelen og imaginærdelen til dette tallet.

Vi må gjøre om dette tallet slik at det kommer på formen $a + bi$ for å vite hva realdelen og imaginærdelen er. Vi gjør dette ved å multiplisere teller og nevner med den komplekskonjugerte av nevneren:

$$z = \frac{5}{1-2i} = \frac{5}{1-2i} \cdot \frac{1+2i}{1+2i} = \frac{5(1+2i)}{1^2+2^2} = \frac{5+10i}{1+4} = \frac{5}{5} + \frac{10}{5}i = \underline{\underline{1+2i}}$$

Følgelig:

$$\underline{\underline{\operatorname{Re}[z] = 1 \text{ og } \operatorname{Im}[z] = 2}}$$

Oppgave 3

Følgende ligning beskriver en kurve i planet:

$$\ln y + x^3 y^2 - e^x = -1$$

Vis at punktet $(0, 1)$ ligger på kurven, og finn ligningen til kurvens tangent i dette punktet.

At punktet ligger på kurven, kan vi vise ved å sette inn $x = 0$ og $y = 1$ i ligningen og se at venstre side blir lik høyre side. Venstre side blir

$$\ln 1 + 0^3 \cdot 1^2 - e^0 = 0 + 0 - 1 = -1$$

Vi ser at venstre side er lik høyre side, og punktet ligger derfor på kurven.

Vi finner stigningstallet til tangenten ved å finne den deriverte i dette punktet. Vi deriverer implisitt, og får

$$\frac{1}{y} \cdot y' + 3x^2 y^2 + x^3 \cdot 2y \cdot y' - e^x = 0$$

Vi flytter så alle ledd som ikke inneholder y' over på høyre side og setter y' utenfor parentes på venstre side:

$$\left(\frac{1}{y} + 2x^3 y \right) y' = e^x - 3x^2 y^2$$

Så dividerer vi på begge sider med uttrykket som står i parentes, og får derved følgende uttrykk for y' :

$$y' = \frac{e^x - 3x^2 y^2}{\frac{1}{y} + 2x^3 y}$$

Vi kan nå finne stigningstallet til tangenten i punktet $(0, 1)$ ved å sette inn $x = 0$ og $y = 1$ i dette uttrykket:

$$y'(0, 1) = \frac{e^0 - 3 \cdot 0^2 \cdot 1^2}{\frac{1}{1} + 2 \cdot 0^3 \cdot 1} = \frac{1 - 0}{1 + 0} = 1$$

Stigningstallet til tangenten er altså 1.

Vi kan så benytte ettpunktsformelen for å finne ligningen til tangenten, med $(0, 1)$ som kjent punkt og $a = 1$ som stigningstall:

$$y - 1 = 1 \cdot (x - 0)$$

Ordner vi dette uttrykket, får vi følgende uttrykk for ligningen til tangenten:

$$\underline{\underline{y = x + 1}}$$

Oppgave 4

Gitt funksjonen

$$f(x) = \frac{xe^x}{e^x - 1}$$

Finn grenseverdien $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

Hvis vi setter inn $x = 0$ i funksjonen, ser vi at vi får

$$\frac{0 \cdot e^0}{e^0 - 1} = \frac{0}{1 - 1} = \frac{0}{0}$$

Vi får altså et ubestemt uttrykk, og vi må benytte l'Hôpitals regel og derivere teller og nevner for å finne grenseverdien. Husk at vi må bruke produktregelen når vi deriverer telleren:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xe^x}{e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 \cdot e^x + x \cdot e^x}{e^x} = \frac{e^0 + 0 \cdot e^0}{e^0} = \frac{1 + 0}{1} = 1$$

Oppgave 5

Gitt funksjonen $h(x) = \frac{1}{1 + 2x}$.

Finn den annenderiverte til denne funksjonen.

Her kan vi bruke regelen for derivasjon av en brøk, altså at $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$, som gir

$$h'(x) = \frac{0 \cdot (1 + 2x) - 1 \cdot (0 + 2)}{(1 + 2x)^2} = \frac{-2}{(1 + 2x)^2}$$

$$h''(x) = \frac{0 \cdot (1 + 2x)^2 - (-2) \cdot 2(1 + 2x) \cdot (0 + 2)}{(1 + 2x)^4} = \frac{8 \cdot (1 + 2x)}{(1 + 2x)^4} =$$

$$\underline{\underline{\frac{8}{(1 + 2x)^3} = \frac{8}{8x^3 + 12x^2 + 6x + 1}}}$$

Alternativt kan vi bruke at $\frac{1}{1 + 2x} = (1 + 2x)^{-1}$ og benytte kjerneregelen. Dette gir:

$$h'(x) = \left((1+2x)^{-1} \right)' = (-1)(1+2x)^{-1-1} \cdot (1+2x)' = -(1+2x)^{-2} \cdot 2 = -2 \cdot (1+2x)^{-2}$$

Deriverer vi en gang til, får vi

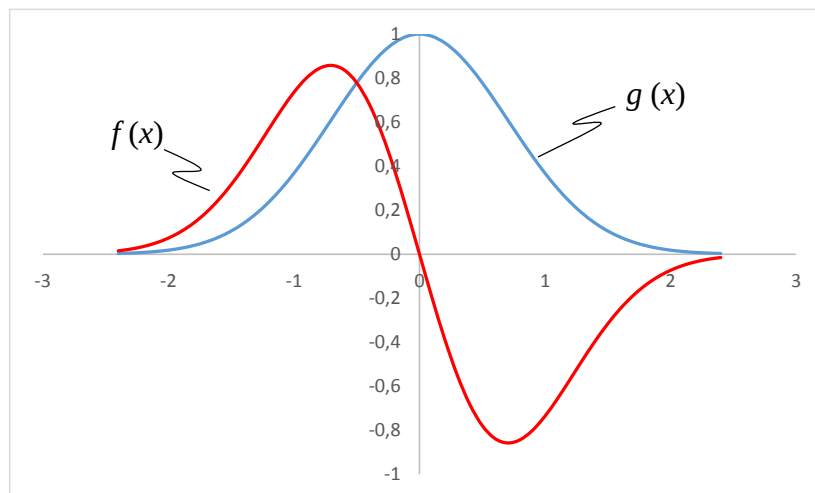
$$h''(x) = \left(-2 \cdot (1+2x)^{-2} \right)' = (-2)(-2)(1+2x)^{-2-1} \cdot (1+2x)' = 4(1+2x)^{-3} \cdot 2 = 8 \cdot (1+2x)^{-3}$$

$$= \underline{\underline{\frac{8}{(1+2x)^3}}}$$

Oppgave 6

Nedenfor er grafene til to funksjoner, $f(x)$ og $g(x)$, tegnet.

Den ene funksjonen er den deriverte av den andre.



Forklar og begrunn hvilken av disse funksjonene som er den deriverte av den andre.

Det er flere måter å begrunne dette på, men den mest opplagte måten er å observere at $f(x)$ er 0 der $g(x)$ har sitt maksimum. Der $g(x)$ har sitt maksimum, er tangenten horisontal, og den deriverte følgerlig 0. Det motsatte er ikke tilfelle. Der $f(x)$ har sitt maksimum, er ikke $g(x) = 0$, og $g(x)$ kan derfor ikke være den deriverte av $f(x)$. Altså må

$$\underline{\underline{f(x) = g'(x)}}$$

Vi ser også at i det området der $g(x)$ øker, altså for negative verdier av x , så er $f(x)$ positiv, mens der $g(x)$ minker, altså for positive x -verdier, er $f(x)$ negativ. Dette kan også brukes som begrunnelse.

Vi kan også begrunne at $g(x)$ ikke kan være den deriverte av $f(x)$ ved å observere at i området der $f(x)$ minker (altså i intervallet som ser ut til å være omtrentlig $[-0.7, 0.7]$) er $g(x)$ positiv. Dersom $g(x)$ skulle vært den deriverte av $f(x)$ måtte $g(x)$ vært negativ i dette området, fordi en negativ derivert angir at funksjonen er avtagende.

Hvis noen lurer på hvilke funksjoner dette er, så kan jeg røpe at de er

$$f(x) = -2xe^{-x^2} \quad \text{og} \quad g(x) = e^{-x^2}$$

Oppgave 7

En funksjon av to variable gitt ved

$$z = f(x, y) = xe^{xy}$$

er definert for alle reelle x og y .

a) Finn f_x og f_y .

Her må vi huske på å bruke regelen for derivasjon av et produkt. Vi får da

$$f_x(x, y) = 1 \cdot e^{xy} + x \cdot e^{xy} \cdot \frac{\partial}{\partial x}(xy) = e^{xy} + x \cdot e^{xy} \cdot y = e^{xy} + xye^{xy}$$

$$\underline{\underline{(1 + xy)e^{xy}}}$$

$$f_y(x, y) = 0 \cdot e^{xy} + x \cdot e^{xy} \cdot \frac{\partial}{\partial y}(xy) = 0 + x \cdot e^{xy} \cdot x = \underline{\underline{x^2 e^{xy}}}$$

b) Benytt lineær approksimasjon for $f(x, y)$ i punktet $(1, 0)$ til å finne en tilnærmet funksjonsverdi i punktet $(0.9, 0.1)$.

Lineær approksimasjon innebærer å tilnærme flaten som utgjør grafen til funksjonen med et tangentplan. Den lineære approksimasjonen omkring et punkt (a, b) er generelt gitt ved

$$f(a + h, b + k) \approx f(a, b) + f_x(a, b) \cdot h + f_y(a, b) \cdot k$$

For vår funksjon omkring punktet $(1, 0)$ får vi da:

$$f(1, 0) = 1 \cdot e^{1 \cdot 0} = 1 \cdot e^0 = 1 \cdot 1 = \underline{1}$$

$$f_x(1, 0) = (1 + 1 \cdot 0)e^{1 \cdot 0} = 1 \cdot 1 = \underline{1}$$

og

$$f_y(1, 0) = 1^2 \cdot e^{1 \cdot 0} = 1 \cdot 1 = \underline{1}$$

Følgelig får vi

$$f(1 - 0.1, 0 + 0.1) \approx f(1, 0) + f_x(1, 0) \cdot (-0.1) + f_y(1, 0) \cdot 0.1 =$$

$$1 + 1 \cdot (-0.1) + 1 \cdot 0.1 = 1 - 0.1 + 0.1 = \underline{\underline{1}}$$

(Regner vi ut dette ved hjelp av kalkulator får vi 0.9848...)

Oppgave 8

Finn følgende integraler

a) $\int (x^2 + e^{2x} + \frac{1}{x^2} + 1) dx$

Denne er «rett fram» å integrere. Vi kan integrere hvert ledd for seg. Det kan være lettere å integrere dersom vi skriver $\frac{1}{x^2}$ som x^{-2} :

$$\int (x^2 + e^{2x} + x^{-2} + 1) dx = \underline{\underline{\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}e^{2x} - x^{-1} + x + C}}$$

b) $\int (x^2 + x + 3)\cos x dx$

Her må vi bruke delvis integrasjon. Hvis vi velger

$$u' = \cos x \text{ og } v = x^2 + x + 3$$

får vi

$$u = \sin x \text{ og } v' = 2x + 1$$

Regelen for delvis integrasjon er

$$\int u'v dx = uv - \int uv' dx$$

Bruker vi dette får vi:

$$\int (x^2 + x + 3)\cos x dx = (x^2 + x + 3)\sin x - \int (2x + 1)\sin x dx$$

For å finne det siste integralet må vi bruke delvis integrasjon en gang til.

Hvis vi velger

$$u' = \sin x \text{ og } v = 2x + 1$$

får vi

$$u = -\cos x \text{ og } v' = 2$$

Bruker vi dette får vi:

$$\int (2x + 1)\sin x dx = (2x + 1)(-\cos x) - \int (-\cos x) \cdot 2 dx =$$

$$-(2x + 1)\cos x + 2\int \cos x dx = -(2x + 1)\cos x + 2\sin x + C_1$$

Setter vi dette inn i uttrykket over, får vi:

$$\begin{aligned}\int (x^2 + x + 3) \cos x \, dx &= (x^2 + x + 3) \sin x - \int (2x + 1) \sin x \, dx = \\ &= (x^2 + x + 3) \sin x - (-(2x + 1) \cos x + 2 \sin x + C_1) = \\ &= (x^2 + x + 3) \sin x + (2x + 1) \cos x - 2 \sin x - C_1 = \\ &= (x^2 + x + 3 - 2) \sin x + (2x + 1) \cos x + C = \\ &= \underline{\underline{(x^2 + x + 1) \sin x + (2x + 1) \cos x + C}}\end{aligned}$$

c) $\int \frac{3x^3 - 4x^2 - 12x - 1}{x^2 - 2x - 3} \, dx$

Her kan vi bruke delbrøkopp spalting. Fordi graden til polynomet i nevneren er mindre enn graden til polynomet i telleren, må vi først utføre en polynomdivisjon:

$$\begin{array}{r} (3x^3 - 4x^2 - 12x - 1) : (x^2 - 2x - 3) = 3x + 2 \\ \underline{-(3x^3 - 6x^2 - 9x)} \\ 2x^2 - 3x - 1 \\ \underline{-(2x^2 - 4x - 6)} \\ x + 5 \end{array}$$

Dette betyr at integranden kan skrives slik:

$$\frac{3x^3 - 4x^2 - 12x - 1}{x^2 - 2x - 3} = 3x + 2 + \frac{x + 5}{x^2 - 2x - 3}$$

$3x$ og 2 kan enkelt integreres, og vi trenger nå å gjøre en delbrøkopp spalting av det siste leddet.

Vi må først finne røttene i nevneren slik at denne kan faktorerises:

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2}$$

$$x = \frac{2+4}{2} = \frac{6}{2} = 3 \quad \vee \quad x = \frac{2-4}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

Dette innebærer at vi kan skrive nevneren slik:

$$x^2 - 2x - 3 = (x-3)(x+1)$$

Vi kan da utføre delbrøkoppstillingen:

$$\frac{x+5}{x^2-2x-3} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+1} \quad | \cdot (x-3)(x+1)$$

$$x+5 = A(x+1) + B(x-3)$$

Så setter vi inn $x = 3$ i dette uttrykket, og får:

$$3+5 = A(3+1) + B(3-3)$$

som gir

$$8 = A \cdot 4 + B \cdot 0$$

og altså

$$\underline{A = 2}$$

Så setter vi inn $x = -1$:

$$-1+5 = A(-1+1) + B(-1-3)$$

som gir

$$4 = A \cdot 0 + B(-4)$$

og altså

$$\underline{B = -1}$$

Delbrøkoppstillingen blir følgelig

$$\frac{x+5}{x^2-2x-3} = \frac{2}{x-3} - \frac{1}{x+1}$$

Vi er nå klare til å utføre integrasjonen:

$$\int \frac{3x^3 - 4x^2 - 12x - 1}{x^2 - 2x - 3} dx = \int \left(3x + 2 + \frac{x+5}{x^2 - 2x - 3} \right) dx =$$

$$\int \left(3x + 2 + \frac{2}{x-3} - \frac{1}{x+1} \right) dx =$$

$$\underline{\underline{\frac{3}{2}x^2 + 2x + 2\ln|x-3| - \ln|x+1| + C}}$$

Oppgave 9

Gitt følgende funksjon:

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 4} \quad D_f = \mathbb{R}$$

Avgjør om funksjonen $f(x)$ er symmetrisk om y -aksen, om origo eller ingen av delene.

Vi undersøker dette ved å sette inn $-x$ i funksjonen. Dersom $f(-x) = f(x)$, er funksjonen symmetrisk om y -aksen. Dersom $f(-x) = -f(x)$, er funksjonen symmetrisk om origo.

$$f(-x) = \frac{-x}{(-x)^2 + 4} = \frac{-x}{x^2 + 4} = -\frac{x}{x^2 + 4} = -f(x)$$

Vi ser at $f(-x) = -f(x)$. Av dette kan vi slutte at

funksjonen er symmetrisk om origo.