



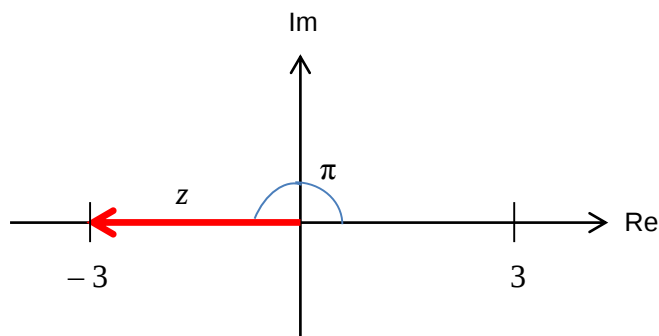
EKSAMEN – Løsningsforslag

Emnekode: ITD15013	Emne: Matematikk 1 – første deleksamen
Dato: 16. desember 2014	Eksamenstid: 09.00 – 12.00
Hjelpemidler: To A4-ark med valgfritt innhold på begge sider. Formelhefte. Kalkulator er ikke tillatt .	Faglærer: Christian F Heide
Eksamensoppgaven: Oppgavesettet består av 5 sider inklusiv denne forsiden og et vedlegg på én side. Kontroller at oppgaven er komplett før du begynner å besvare spørsmålene. Oppgavesettet består av 9 oppgaver med i alt 13 deloppgaver. Ved sensur vil alle deloppgaver telle omtrent like mye. Der det er mulig skal du: • vise utregninger og hvordan du kommer fram til svarene • begrunne dine svar, selv om dette ikke er eksplisitt sagt i hvert spørsmål	
Sensurdato: 16. januar 2015	
Karakterene er tilgjengelige for studenter på studentweb senest 2 virkedager etter oppgitt sensurfrist. Følg instruksjoner gitt på: www.hiof.no/studentweb	

Oppgave 1

Gitt det komplekse tallet $z = 3e^{i\pi}$. Hva er realdelen og imaginærdelen til dette tallet?

Tallet har altså en modulus (lengde) på 3 og et argument (vinkel) på π . Real del og imaginær del er kanskje lettest å se dersom vi tegner tallet i det komplekse planet:



Av figuren ser vi at $\text{Re}(z) = -3$ og $\text{Im}(z) = 0$.

Alternativt kan vi regne ut dette ved å bruke at $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$:

$$3e^{i\pi} = 3(\cos \pi + i \sin \pi) = 3(-1 + i \cdot 0) = -3 + 0i$$

Altså: realdel er -3 og imaginær del er 0 .

Oppgave 2

En funksjon er definert ved

$$f(x) = \frac{x^2 + 3x}{x - 1} \quad x \neq 1$$

Finn funksjonens asymptoter.

Vertikale asymptoter kan vi ha der nevneren er 0. Her er nevneren 0 når $x = 1$. Vi må da sjekke at ikke også telleren blir 0 for $x = 1$, for i så fall har vi et ubestemt $\frac{0}{0}$ -uttrykk, og vi må sjekke hva grenseverdien er ved hjelp av l'Hôpitals regel. Her ser vi at telleren blir 4 for $x = 1$. Dette innebærer at funksjonen går mot ∞ når x går mot 1. Følgelig kan vi konkludere med at funksjonen har en vertikal asymptote for $x = 1$.

Vi ser at graden til telleren er høyere enn graden til nevneren. Funksjonen har derfor ingen horisontale asymptoter.

Skråasymptoter

Siden funksjonen er en polynombrøk kan vi finne skråasymptoter ved polynomdivisjon:

$$\begin{array}{r}
 (x^2 + 3x) : (x - 1) = x + 4 \\
 \underline{-(x^2 - x)} \\
 4x \\
 \underline{-(4x - 4)} \\
 4
 \end{array}$$

Av dette ser vi at funksjonsuttrykket kan skrives

$$f(x) = \frac{x^2 + 3x}{x - 1} = x + 4 + \frac{4}{x - 1}$$

Når x vokser blir betydningen av det siste leddet mindre og mindre siden det har x i nevneren, og funksjonen nærmer seg mer og mer $x + 4$. Følgelig har funksjonen følgende **skråasymptote**:

$$\underline{\underline{y = x + 4}}$$

Oppgave 3

Deriver følgende funksjon:

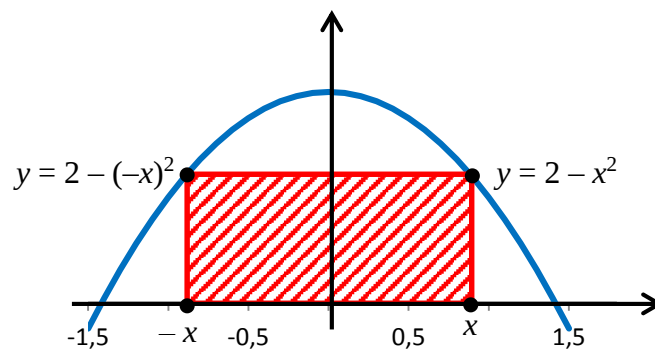
$$f(x) = \cos \sqrt{1 - x^2}$$

Her må vi bruke at den deriverte av $\cos x$ er $-\sin x$ og kjerneregelen med kjerne $u = \sqrt{1 - x^2}$. Vi får da

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= (-\sin \sqrt{1 - x^2}) \cdot (\sqrt{1 - x^2})' = (-\sin \sqrt{1 - x^2}) \cdot \frac{1}{2}(1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (1 - x^2)' = \\
 &= -\frac{\sin \sqrt{1 - x^2}}{2\sqrt{1 - x^2}} \cdot (-2x) = \underline{\underline{\frac{x \sin \sqrt{1 - x^2}}{\sqrt{1 - x^2}}}}
 \end{aligned}$$

Oppgave 4

To hjørner i et rektangel ligger på x -aksen. De to andre hjørnene i rektangelet ligger over x -aksen på kurven $y = 2 - x^2$ slik figuren viser. Finn det største arealet dette rektangelet kan ha.



Arealet av et rektangel er produktet av sidekantene (grunnlinja ganger høyden). Hvis vi kaller punktene langs x -aksen som er hjørner i rektangelet for x og $-x$, så vil grunnlinjen i rektangelet ha en lengde på $2x$. Høyden av rektangelet vil avhenge av hvor vi legger hjørnet x , men vil uansett være gitt av $y = 2 - x^2$. Arealet er produktet av disse, og er derfor gitt ved

$$A(x) = 2x \cdot (2 - x^2) = 4x - 2x^3$$

For å finne maksimalt areal, deriverer vi denne og finner

$$A'(x) = 4 - 6x^2$$

Vi finner kritiske punkter ved å finne hvor den deriverte er 0:

$$4 - 6x^2 = 0$$

som gir

$$x = \pm \sqrt{\frac{2}{3}}$$

Vi trenger ikke å vurdere negative x -verdier. Vi ser at den deriverte er positiv i intervallet

$\left[0, \sqrt{\frac{2}{3}}\right]$, mens den er negativ i intervallet $\left[\sqrt{\frac{2}{3}}, \rightarrow\right)$. Dette innebærer at $A(x)$ har et

maksimum for $x = \sqrt{\frac{2}{3}}$. Arealet er da

$$A\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = 4 \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} - 2 \cdot \sqrt{\frac{2}{3}}^3 = 4 \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} - 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} = \left(\frac{12}{3} - \frac{4}{3}\right) \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} = \underline{\underline{\frac{8}{3} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}}}}$$

Oppgave 5

Funksjonen

$$f(x) = \frac{1 - \cos x}{\sin x}$$

er i utgangspunktet ikke definert for $x = 0$ fordi nevneren i brøken da blir 0. Allikevel kan vi definere funksjonsverdien i $x = 0$ til å være et bestemt tall fordi grenseverdien

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x}$$

eksisterer.

- a) Forklar hva som menes med at denne grenseverdien eksisterer.

Det betyr at funksjonen kan få en verdi som er så nær grenseverdien vi ønsker ved å la x bli tilstrekkelig nær 0.

- b) Finn denne grenseverdien.

Vi ser at dette er et $\frac{0}{0}$ -uttrykk, siden $\cos 0 = 1$ og telleren derfor går mot 0 når x går mot 0. Vi kan derfor bruke l'Hôpitals regel. Vi får da:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{0}{1} = 0$$

Oppgave 6

Finn følgende ubestemte integraler:

a) $\int \left(4x^3 + e^{3x} - \frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx$

$$= \frac{4}{3+1} x^{3+1} + \frac{1}{3} e^{3x} - \ln |x| + \frac{1}{-\frac{1}{2}+1} x^{-\frac{1}{2}+1} + C$$

$$= x^4 + \frac{1}{3} e^{3x} - \ln |x| + 2x^{\frac{1}{2}} + C$$

b) $\int x^3 \ln x \, dx$

Her må vi bruke delvis integrasjon. Regelen for delvis integrasjon er slik:

$$\int u'v \, dx = uv - \int uv' \, dx$$

Vi velger å kalle

$$u' = x^3 \quad \text{og} \quad v = \ln x$$

som gir

$$u = \frac{1}{4} x^4 \quad \text{og} \quad v' = \frac{1}{x}$$

Bruker vi dette får vi

$$\int x^3 \ln x \, dx = \frac{1}{4} x^4 \ln x - \int \frac{1}{4} x^4 \cdot \frac{1}{x} \, dx = \frac{1}{4} x^4 \ln x - \frac{1}{4} \int x^3 \, dx =$$

$$\frac{1}{4} x^4 \ln x - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} x^4 + C = \frac{1}{4} x^4 \ln x - \frac{1}{16} x^4 + C =$$

$$\underline{\underline{\frac{x^4}{4} \left(\ln x - \frac{1}{4} \right) + C = \frac{x^4}{16} (4 \ln x - 1) + C}}$$

c) $\int \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x} \, dx$

Dette integralet kan vi finne ved hjelp av substitusjon. Hvis vi benytter substitusjonen $u = \cos x$ får vi

$$\frac{du}{dx} = -\sin x \quad \text{som gir} \quad dx = -\frac{1}{\sin x} du$$

Bruker vi dette i integralet, får vi

$$\int \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x} \, dx = \int \frac{\sin x}{1 + u^2} \cdot \left(-\frac{1}{\sin x} \right) du = - \int \frac{1}{1 + u^2} du$$

Her kan vi bruke følgende integrasjonsregel:

$$\int \frac{1}{1 + x^2} \, dx = \arctan x + C$$

Bruker vi denne finner vi

$$\int \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x} \, dx = - \int \frac{1}{1 + u^2} du = -\arctan u + C$$

$$= -\arctan(\cos x) + C = -\tan^{-1}(\cos x) + C$$

Oppgave 7

En funksjon av to variable gitt ved

$$z = f(x, y) = -4x + 2y + x^2 - y^2$$

er definert for alle reelle x og y .

a) Finn $\frac{\partial f}{\partial x}$ og $\frac{\partial f}{\partial y}$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x = \underline{\underline{-4 + 2x}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = f_y = \underline{\underline{2 - 2y}}$$

b) Finn og klassifiser eventuelle lokale ekstremalverdier for $f(x, y)$.

Siden funksjonen er definert for hele $\mathbb{R}^2$ har vi ingen randpunkter vi må undersøke. Det er derfor tilstrekkelig å undersøke funksjonens kritiske punkter, altså der de partiellderivate er null:

Vi finner først hvor den partiellderivate med hensyn på x er 0:

$$f_x = 0$$

dvs.

$$-4 + 2x = 0$$

altså

$$x = 2$$

Videre må vi finne hvor den partiellderivate med hensyn på y er 0:

$$f_y = 0$$

dvs.

$$2 - 2y = 0$$

som gir

$$y = 1$$

Funksjonen har altså et kritisk punkt i (2, 1).

Vi må så finne de partiellderiverte av 2. orden for å kunne klassifisere dette punktet:

$$f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (-4 + 2x) = \underline{2}$$

$$f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} (2 - 2y) = \underline{-2}$$

$$f_{xy} = f_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} (2 - 2y) = \underline{0}$$

Diskriminanten er da

$$\Delta = f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2 = 2 \cdot (-2) - 0^2 = -4$$

En negativ diskriminant viser at punktet (2, 1) er et sadelpunkt.

Oppgave 8

Bruk lineær approksimasjon for $f(x) = \cos x$ omkring $x = \frac{\pi}{2}$ for å finne en tilnærmet verdi for $\cos\left(\frac{\pi}{2} - 0.1\right)$.

Den lineære approksimasjon for en funksjon $f(x)$ omkring et punkt $x = a$ er generelt gitt ved

$$f(a + h) \approx f(a) + f'(a) \cdot h$$

hvor h er avstanden fra a .

I dette tilfellet blir $f'(x) = -\sin x$. Dette gir

$$\cos(a + h) \approx \cos a - h \cdot \sin a$$

I vårt tilfelle er $a = \frac{\pi}{2}$ og $h = -0.1$. Setter vi inn disse tallene, finner vi

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - 0.1\right) \approx \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - (-0.1) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

Siden $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ og $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, får vi

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - 0.1\right) \approx 0 + 0.1 \cdot 1 = \underline{\underline{0.1}}$$

(Regner vi ut dette på kalkulator, finner vi at det blir 0.0998, så vår approksimasjon er meget god).

Oppgave 9

Følgende ligning skal løses numerisk ved hjelp av Newtons metode:

$$\cos x = \frac{1}{2} x^2$$

Ligningen har en løsning i intervallet $[0, 2]$. Bruk derfor startverdi 1 og vis første iterasjon i Newtons metode.

Siden du ikke har kalkulator trenger du ikke å regne ut x_1 , men må sette opp hvordan den skal regnes ut.

Siden Newtons metode finner nullpunkter, er det første vi må gjøre å omforme ligningen slik at vi har et uttrykk som er lik 0. Dette gjør vi ved å flytte $\frac{1}{2} x^2$ over på venstre side:

$$\cos x - \frac{1}{2} x^2 = 0$$

Venstre side i dette uttrykket er det som kalles $f(x)$ i formelen for Newtons metode, dvs.

$$f(x) = \cos x - \frac{1}{2} x^2.$$

Formelen for Newtons metode er

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Vi har fått oppgitt x_0 og skal regne ut x_1 . Vi trenger å finne $f'(x)$. Den er:

$$f'(x) = -\sin x - x$$

Formelen gir da

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 1 - \frac{\cos 1 - \frac{1}{2} \cdot 1^2}{-\sin 1 - 1} = 1 + \frac{\cos 1 - \frac{1}{2}}{\sin 1 + 1}$$

(Ved bruk av kalkulator finner man at dette er omtrent 1.0219)