EKSAMEN – Løsningsforslag

Emnekode: **ITD15013**	Emne: **Matematikk 1**
Dato: **10. desember 2013**	Eksamenstid: 09.00 – 12.00

Hjelpemidler: To A4-ark med valgfritt innhold på begge sider. Formelhefte. Kalkulator er **ikke tillatt**.	Faglærer: Christian F Heide

Eksamensoppgaven:
Oppgavesettet består av 5 sider inklusiv denne forsiden og et vedlegg på én side. Kontroller at oppgaven er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgavesettet består av 8 oppgaver med i alt 18 deloppgaver. Ved sensur vil alle deloppgaver telle omtrent like mye.

Der det er mulig skal du:
- **vise utregninger** og hvordan du kommer fram til svarene
- **begrunne dine svar**, selv om dette ikke er eksplisitt sagt i hvert spørsmål

Sensurdato: 9. januar 2013

Karakterene er tilgjengelige for studenter på studentweb senest 2 virkedager etter oppgitt sensurfrist. Følg instruksjoner gitt på: www.hiof.no/studentweb

Oppgave 1
Gitt følgende vektorer i det euklidske rommet $\mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{v} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$$

$$\mathbf{w} = -\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$$

a) *Undersøk om vektorene er ortogonale (altså om de står normalt på hverandre).*
For å undersøke dette kan vi se om skalarproduktet (prikkproduktet) er 0:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 1 \cdot 0 + 2 \cdot (-1) + (-1) \cdot (-2) = 0 - 2 + 2 = \underline{0}$$

Vi ser at skalarproduktet er 0. Av det kan vi slutte at $\underline{\underline{\text{vektorene er ortogonale}}}$.

b) Finn $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$.

$$\mathbf{v} \times \mathbf{w} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} k =$$

$$(2 \cdot (-2) - (-1) \cdot (-1))\, \mathbf{i} - (1 \cdot (-2) - (-1) \cdot 0)\, \mathbf{j} + (1 \cdot (-1) - 2 \cdot 0)\, \mathbf{k} =$$

$$\underline{\underline{-5\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}}}$$

Oppgave 2

Gitt de komplekse tallene $z = 1 - \sqrt{3}i$ *og* $w = 2 - \sqrt{3}i$.

a) *Finn* $\frac{z}{w}$. *Skriv svaret på formen a + bi.*

Vi skal altså finne

$$\frac{z}{w} = \frac{1 - \sqrt{3}i}{2 - \sqrt{3}i}$$

Vi kommer videre ved å gange teller og nevner med den kompleks-konjugerte av nevneren samt å huske at $i^2 = -1$:

$$\frac{z}{w} = \frac{1 - \sqrt{3}i}{2 - \sqrt{3}i} \cdot \frac{2 + \sqrt{3}i}{2 + \sqrt{3}i} = \frac{1 \cdot 2 + 1 \cdot \sqrt{3}i - \sqrt{3}i \cdot 2 - \sqrt{3}i \cdot \sqrt{3}i}{2^2 + \sqrt{3}^2}$$

$$= \frac{2 + \sqrt{3}i - 2\sqrt{3}i - 3 \cdot i^2}{4 + 3} = \frac{2 + 3 - \sqrt{3}i}{7} = \underline{\underline{\frac{5}{7} - \frac{\sqrt{3}}{7}i}}$$

b) *Skriv tallet z på eksponentialform.*
Modulus:

$$r = |z| = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = \underline{2}$$

Argument:
Når vi skal finne argumentet kan det være lurt å tenke på at tallet er i 4. kvadrant. Vi har

$$\cos\varphi = \frac{\mathrm{Re}(z)}{r} = \frac{1}{2}$$

som gir:

$$\varphi = \cos^{-1}\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3} \qquad \vee \qquad \varphi = -\frac{\pi}{3}$$

Den siste vinkelen finner vi fordi cosinus til φ har samme verdi som cosinus til eksplementvinkelen til φ (altså vinkelen som er symmetrisk med φ om 1.-aksen). Av det faktum at tallet ligger i 4. kvadrant kan vi allerede nå fastslå at argumentet er $\varphi = -\frac{\pi}{3}$. Dette vil også bli klart dersom vi også benytter sinus til å beregne argumentet:

$$\sin\varphi = \frac{\mathrm{Im}(z)}{r} = \frac{-\sqrt{3}}{2}$$

Dette gir

$$\varphi = \sin^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{4\pi}{3} \qquad \vee \qquad \varphi = \frac{5\pi}{3}$$

«Flytter» vi argumentet til området for hovedargumentet, altså $-\pi < \varphi \le \pi$ får vi følgende argumenter:

$$\varphi = -\frac{\pi}{3} \quad \vee \quad \varphi = -\frac{2\pi}{3}$$

Vi ser altså at det bare er $\varphi = -\frac{\pi}{3}$ som er løsning både på cosinus- og sinus-ligningen. Tallet z kan derfor skrives på eksponentialform som

$$\underline{\underline{z = 2e^{-\frac{\pi}{3}i}}}$$

Oppgave 3

En funksjon f er definert ved

$$y = f(x) = \frac{x^2 + x - 1}{x - 1} \qquad x \neq 1$$

a) *Finn funksjonens asymptoter*.
Vertikale asymptoter har vi der nevneren er 0, altså for $x = 1$, så sant ikke telleren også blir 0 for denne x-verdien. Her ser vi at telleren blir 1 for $x = 1$.
Videre ser vi at

$\lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$ fordi både teller og nevner da er positive

$\lim_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$ fordi teller da vil være positiv mens nevner er negativ

Følgelig:
Grafen har en vertikal asymptote for $x = 1$.

Horisontale asymptoter har vi dersom funksjonen går mot en bestemt verdi når x går mot $\pm\infty$. Her ser vi at graden til telleren er større enn graden til nevneren. Det innebærer at funksjonen vokser over alle grenser når x går mot $\pm\infty$. Funksjonen har derfor ingen horisontale asymptoter.

Skråasymptoter kan vi lettest finne ved polynomdivisjon:

$$\begin{array}{l} (x^2 + x - 1) : (x - 1) = x + 2 \\ -\ \underline{(x^2 - x)} \\ 2x - 1 \\ -\ \underline{(2x - 2)} \\ 1 \end{array}$$

Funksjonen kan altså skrives som

$$f(x) = x + 2 + \frac{1}{x - 1}$$

Av dette ser vi at $\underline{\underline{y = x + 2}}$ er en skråasymptote for denne funksjonen. (Dette fordi betydningen av brøken $\frac{1}{x-1}$ i funksjonsuttrykket blir neglisjerbar når x blir stor).

b) *Finn funksjonens lokale og globale ekstremalverdier, dersom slike finnes*.
Vi kan ha ekstremalverdier i tre tilfeller:
1. Der den deriverte er null.
2. Der den deriverte ikke eksisterer.
3. I definisjonsmengdens randpunkter.

I dette tilfellet vil ikke den deriverte eksistere for *x* = 1. Grafen har imidlertid en asymptote for *x* = 1, og derfor vet vi at funksjonen går mot $\pm\infty$ her, og den har følgelig ingen maks- eller min-verdi for *x* = 1. Av dette kan vi også slutte at grafen <u>ikke har noe **globalt** minimum eller maksimum</u>.

Vi må videre undersøke punkter der den deriverte er 0. Finner først den deriverte:

$$f'(x) = \frac{(2x+1)\cdot(x-1)-(x^2+x-1)\cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{2x^2-2x+x-1-x^2-x+1}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{x^2-2x}{(x-1)^2} = \underline{\frac{x(x-2)}{(x-1)^2}}$$

Vi må så finne hvor den deriverte er 0:

$$\frac{x(x-2)}{(x-1)^2} = 0$$

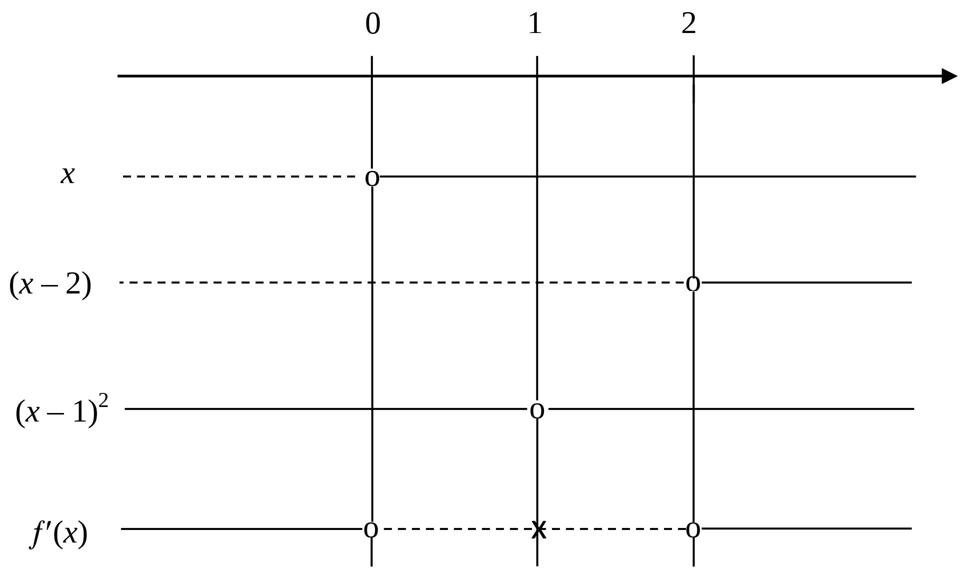
For at en brøk skal være lik 0 må telleren være lik 0, dvs.

$$x(x-2) = 0$$

som gir løsningene:

$$x = 0 \quad \vee \quad x = 2$$

For å finne ut om disse *x*-verdiene gir maksimums- eller minimumspunkter, kan vi for eksempel tegne fortegnsskjema for den deriverte (husk her at $(x-1)^2$ aldri blir negativ):



Vi ser at $f(x)$ er monotont voksende i intervallene $\langle \leftarrow, 0\rangle$ og $\langle 2, \rightarrow\rangle$, mens den er monotont avtagende i intervallene $\langle 0, 1\rangle$ og $\langle 1, 2\rangle$.

Dette innebærer at grafen til $f(x)$ har lokalt maksimum for x = 0, og lokalt minimum for x = 2. Funksjonsverdiene i disse punktene er

$$f(0) = \frac{0^2 + 0 - 1}{0 - 1} = \frac{-1}{-1} = 1$$

$$f(2) = \frac{2^2 + 2 - 1}{2 - 1} = \frac{5}{1} = 5$$

Konklusjon:

$\underline{\underline{f(x) \text{ har lokalt maksimum i punktet } (0, 1) \text{ og lokalt minimum i } (2, 5)}}$.

Oppgave 4

Følgende ligning beskriver en kurve i planet:

$$x^3 + y^3 - 9xy + 9 = 0$$

Vis at punktet (1, 2) *ligger på kurven, og finn ligningen til kurvens tangent i dette punktet*.

For å vise at punktet ligger på kurven må vi vise at x = 1 og y = 2 oppfyller ligningen, altså at venstre side blir 0 (siden høyre side er 0):

$$1^3 + 2^3 - 9 \cdot 1 \cdot 2 + 9 = 1 + 8 - 18 + 9 = 0$$

Dette viser at punktet (1, 2) ligger på kurven.

For å finne tangenten i dette punktet må vi foreta en implisitt derivasjon av uttrykket:

$$3x^2 + 3y^2y' - 9(1 \cdot y + x \cdot y') = 0$$

$$3y^2y' - 9xy' = 9y - 3x^2$$

$$(3y^2 - 9x)y' = 9y - 3x^2$$

$$y' = \frac{9y - 3x^2}{3y^2 - 9x} = \frac{\cancel{3}(3y - x^2)}{\cancel{3}(y^2 - 3x)} = \underline{\underline{\frac{3y - x^2}{y^2 - 3x}}}$$

Den deriverte gir stigningstallet. Setter vi inn x = 1 og y = 2 i uttrykket for den deriverte, finner vi stigningstallet til tangenten i dette punktet:

$$y'(1,2)=\frac{3\cdot 2-1^2}{2^2-3\cdot 1}=\frac{6-1}{4-3}=\underline{5}$$

Vi kan så bruke ettpunktsformelen for finne ligningen til tangenten. Ettpunktsformelen er slik:

$$y-y_0=a(x-x_0)$$

med (x_0, y_0) som kjent punkt på linja og *a* som stigningstall. Setter vi inn $x_0=1, y_0=2$ og *a* = 5, får vi

$$y-2=5(x-1)$$

som når vi ganger ut og ordner, gir

$$\underline{\underline{y=5x-3}}$$

Oppgave 5

Finn følgende grenseverdier dersom de eksisterer.

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{e^{2x}-1}$

Her ser vi at vi får et $\frac{0}{0}$-uttrykk. Vi kan da bruke l'Hôpitals regel som sier at vi kan finne grenseverdien ved å derivere teller og nevner:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{e^{2x}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2e^{2x}}=\frac{1}{2e^{2\cdot 0}}=\underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

b) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\sin x}$ (Hint: ta logaritmen og omform så til et $\frac{\infty}{\infty}$–uttrykk).

Her får vi et uttrykk som er 0^0. For at vi skal får uttrykket på en form så vi kan bruke l'Hôpitals regel, må vi forsøke å ta logaritmen til uttrykket som også hintet sier. Grensen vi da i så fall finner vil være logaritmen til grenseverdien. Logaritmen til uttrykket er:

$$\ln(x^{\sin x})=\sin x\cdot\ln x$$

Hvis vi nå ser på grenseverdien til dette uttrykket, altså

$$\lim_{x\to 0^+}(\sin x\cdot\ln x)$$

ser vi at vi får et $0\cdot\infty$-uttrykk. Vi må omforme dette til et $\frac{0}{0}$ eller $\frac{\infty}{\infty}$-uttrykk. Det er ikke opplagt hva som er lurest av disse to mulighetene, så uten hintet måtte vi ha prøvd oss fram.

Vi omformer til et $\frac{\infty}{\infty}$-uttrykk (husk at vi må derivere nevneren $\dfrac{1}{\sin x}$ som en brøk):

$$\lim_{x\to 0^+}(\sin x \cdot \ln x) = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{\sin x}} \overset{l'H}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{0\cdot \sin x - 1\cdot \cos x}{\sin^2 x}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-\cos x}{\sin^2 x}}$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{\sin^2 x}{-x\cos x}$$

Her har vi igjen et $\frac{0}{0}$-uttrykk, og vi forsøker med l'Hôpital igjen:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin^2 x}{-x\cos x} \overset{l'H}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{2\sin x\cdot \cos x}{-(1\cdot \cos x + x\cdot(-\sin x))} =$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{2\sin x\cdot \cos x}{x\sin x - \cos x} = \frac{2\sin 0\cdot \cos 0}{0\cdot \sin 0 - \cos 0} = \frac{2\cdot 0\cdot 1}{0\cdot 0 - 1} = \frac{0}{-1} = \underline{0}$$

Her må vi huske at svaret vi har fått er logaritmen til grenseverdien.
Grenseverdien blir følgelig

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\sin x} = e^0 = \underline{\underline{1}}$$

Oppgave 6

Finn følgende ubestemte integraler:

a) $\displaystyle\int \left(x^4 - 4x^3 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3} + \sin x \right) dx$

Denne er «rett fram» å integrere. Vi kan integrere hvert ledd for seg. Det kan være lettere å integrere dersom vi skriver $\dfrac{1}{x^3}$ som x^{-3}:

$$\int \left(x^4 - 4x^3 + \frac{1}{x} + x^{-3} + \sin x \right) dx = \tfrac{1}{5}x^5 - 4\tfrac{1}{4}x^4 + \ln|x| + \tfrac{1}{-2}x^{-2} - \cos x + C$$

$$= \underline{\underline{\tfrac{1}{5}x^5 - x^4 + \ln|x| - \tfrac{1}{2}x^{-2} - \cos x + C}}$$

b) $\displaystyle\int 4x\,(x^2 - 3)^{69}\, dx$

Her kan vi bruke substitusjonen $u = x^2 - 3$ som gir

$$\frac{du}{dx} = 2x$$

og følgelig

$$dx = \frac{1}{2x} du$$

Setter vi dette inn i integralet får vi

$$\int 4x\,(x^2-3)^{69}\,dx = \int 4x \cdot u^{69}\,\frac{1}{2x}\,du = 2\int u^{69}du = 2\cdot \tfrac{1}{70}u^{70} + C = \tfrac{1}{35}u^{70} + C$$

$$= \underline{\underline{\tfrac{1}{35}(x^2-3)^{70} + C}}$$

c) $\int (x^2-3)\,e^x\,dx$

Her kan vi bruke delvis integrasjon. Hvis vi velger

$$u' = e^x \text{ og } v = x^2 - 3$$

får vi

$$u = e^x \text{ og } v' = 2x$$

Regelen for delvis integrasjon er

$$\int u'v\,dx = uv - \int uv'\,dx$$

Bruker vi dette får vi:

$$\int (x^2-3)\,e^x\,dx = (x^2-3)e^x - \int 2xe^x dx = (x^2-3)e^x - 2\int xe^x dx$$

For å finne det siste integralet må vi bruke delvis integrasjon en gang til. Hvis vi velger

$$u' = e^x \text{ og } v = x$$

får vi

$$u = e^x \text{ og } v' = 1$$

Bruker vi dette får vi:

$$\int xe^x dx = xe^x - \int 1\cdot e^x dx = xe^x - e^x + C_1$$

Setter vi dette inn i uttrykket ovenfor, får vi:

$$\int (x^2-3)\,e^x\,dx = (x^2-3)e^x - 2\int xe^x dx = (x^2-3)e^x - 2(xe^x - e^x + C_1)$$

$$= x^2e^x - 3e^x - 2xe^x + 2e^x - 2C_1 = x^2e^x - 2xe^x - e^x + C$$

$$= \underline{\underline{(x^2 - 2x - 1)e^x + C}}$$

Oppgave 7

En funksjon av to variable er gitt ved

$$z = f(x, y) = 2x^2 - y^2$$

Funksjonene definert for alle reelle x og y.

a) *Finn* $\frac{\partial f}{\partial x}$ *og* $\frac{\partial f}{\partial y}$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x = \underline{\underline{4x}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = f_y = \underline{\underline{-2y}}$$

b) *Finn og klassifiser eventuelle lokale ekstremalverdier for* $f(x, y)$.

Siden funksjonen er definert for hele $\mathbb{R}^2$ har vi ingen randpunkter vi må undersøke. Det er derfor tilstrekkelig å undersøke funksjonens kritiske punkter, altså der de partiellderiverte er null:

Vi finner først hvor den partiellderiverte med hensyn på *x* er 0:

$$f_x = 0$$

dvs.

$$4x = 0$$

altså

$$x = 0$$

Videre må vi finne hvor den partiellderiverte med hensyn på *y* er 0:

$$f_y = 0$$

dvs.

$$-2y = 0$$

som gir

$$y = 0$$

Funksjonen har altså et kritisk punkt i $\underline{(0, 0)}$.

Vi må så finne de partiellderiverte av 2. orden for å kunne klassifisere dette punktet:

$$f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(4x) = \underline{4}$$

$$f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(-2y) = \underline{-2}$$

$$f_{xy} = f_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(-2y) = \underline{0}$$

Diskriminanten er da

$$\Delta = f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2 = 4 \cdot (-2) - 0^2 = -8$$

En negativ diskriminant viser at punktet (0, 0) er et sadelpunkt.

c) *Funksjonen* $f(x, y)$ *definerer en flate i rommet. Vis at punktet* P (1, 1, 1) *ligger på denne flaten. Bruk så lineær approksimasjon omkring punktet* (1, 1) *til å finne en tilnærmet verdi for funksjonen i punktet* $x = 1.1$ *og* $y = 0.9$.

Vi viser at (1, 1, 1) ligger på flaten ved å sette $x = 1$ og $y = 1$ inn i funksjonen og se at vi får funksjonsverdien $z = 1$:

$$z = f(1, 1) = 2 \cdot 1^2 - 1^2 = 1$$

Dette viser at P ligger på flaten.

Lineær approksimasjon innebærer å tilnærme flaten med et tangentplan. Den lineære approksimasjonen omkring et punkt (a, b) er generelt gitt ved

$$f(a+h, b+k) \approx f(a,b) + f_x(a,b) \cdot h + f_y(a,b) \cdot k$$

Her finner vi, for vår funksjon omkring punktet (1, 1):

$$f(1, 1) = \underline{1}$$

$$f_x(1, 1) = 4 \cdot 1 = \underline{4}$$

og

$$f_y(1, 1) = -2 \cdot 1 = \underline{-2}$$

Følgelig får vi

$$f(1+0.1, 1-0.1) \approx 1 + 4 \cdot 0.1 - 2 \cdot (-0.1) = 1 + 0.4 + 0.2 = \underline{\underline{1.6}}$$

Til sammenligning vil nøyaktig funksjonsverdi i dette punktet være (dette var det ikke spørsmål om i oppgaven)

$$f(1.1, 0.9) = 2 \cdot 1.1^2 - 0.9^2 = 1.61$$